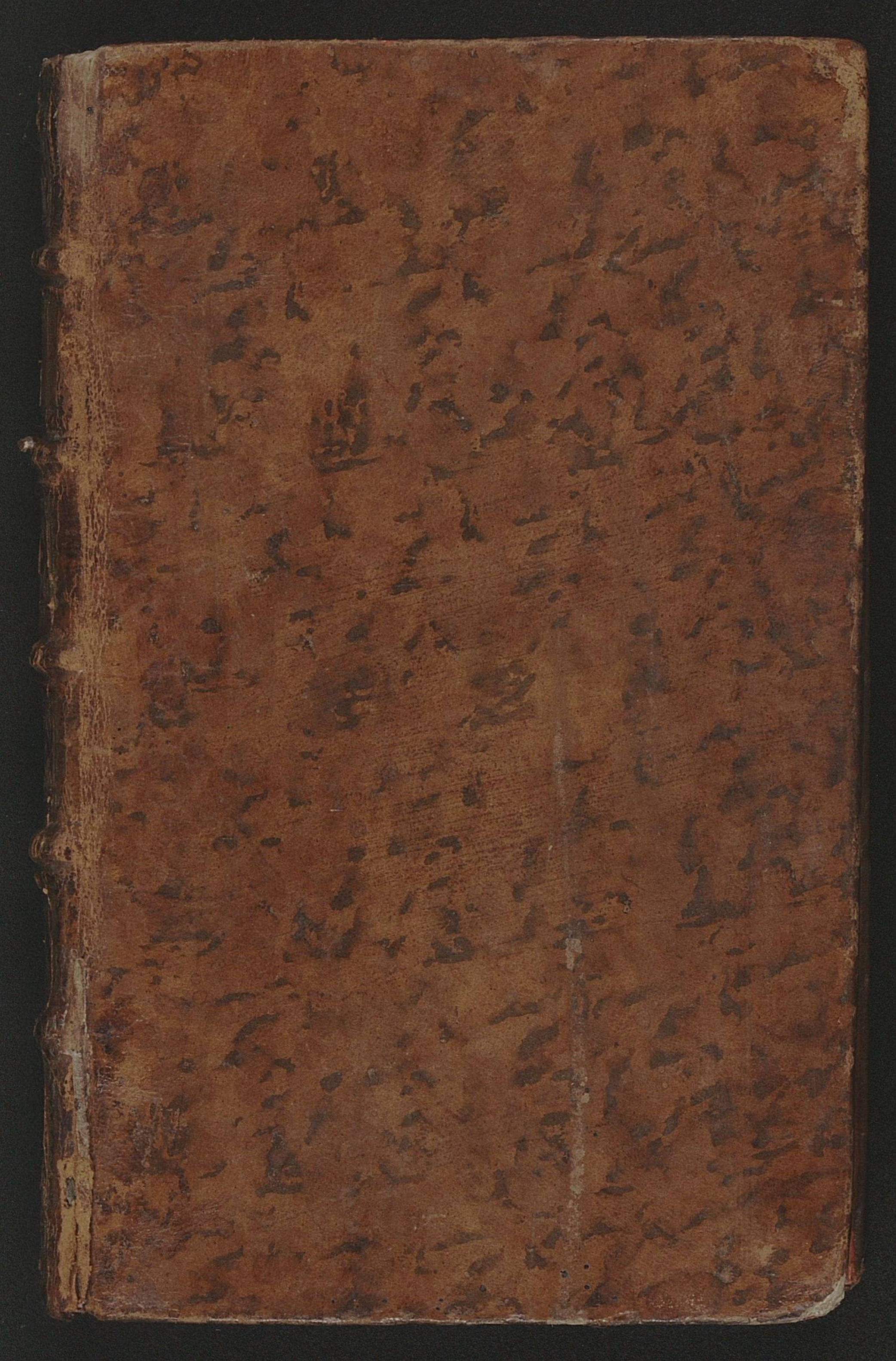
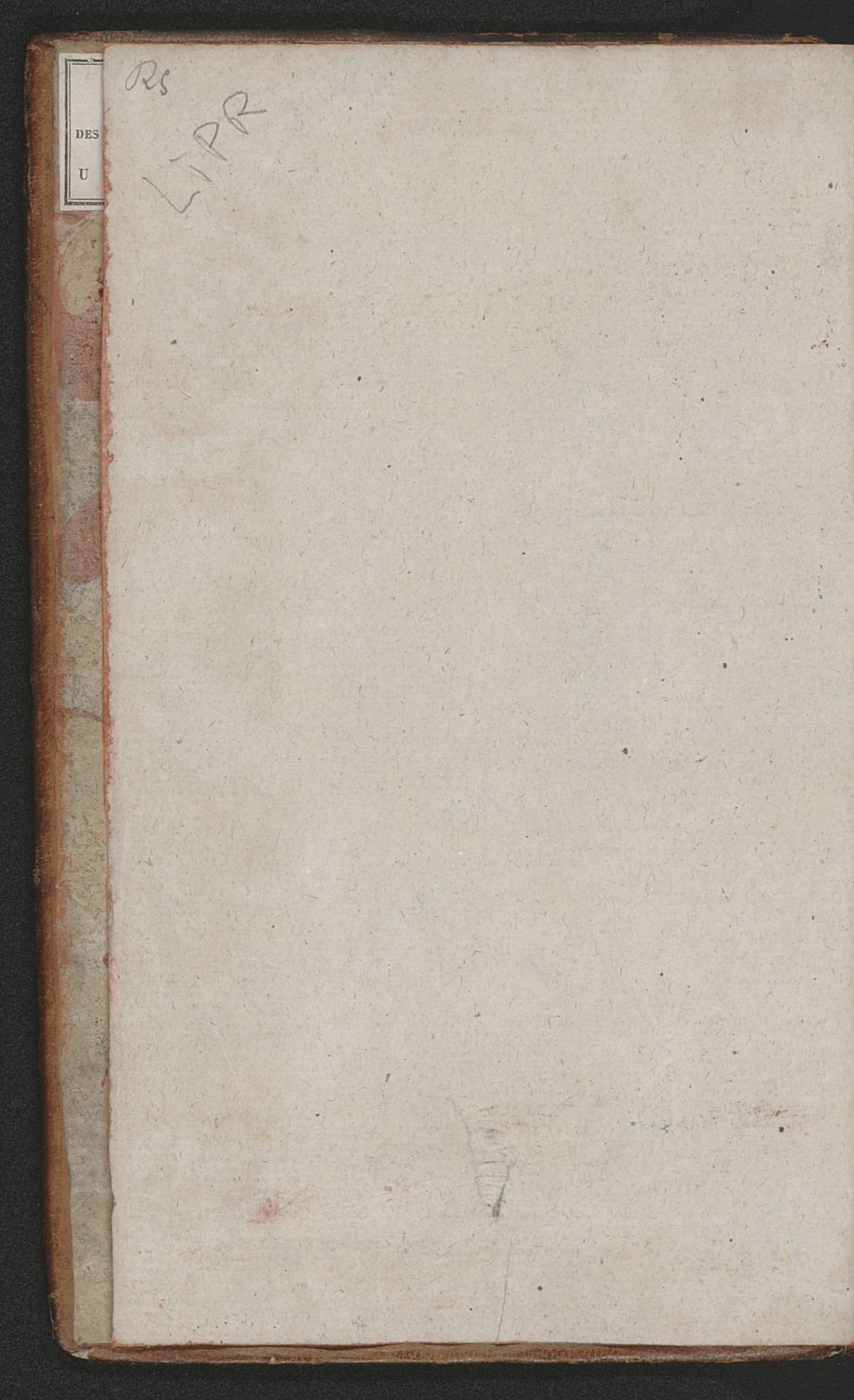
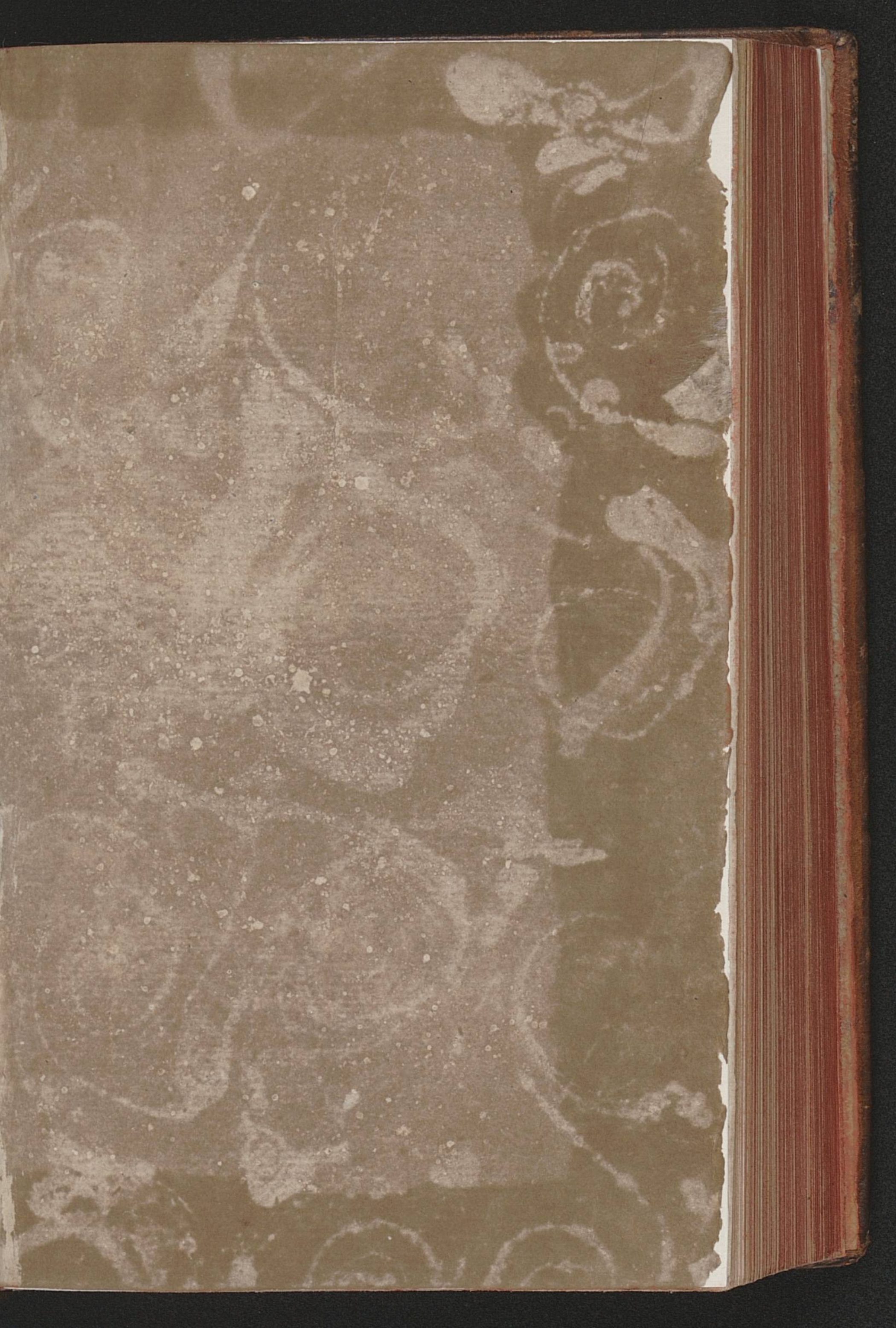
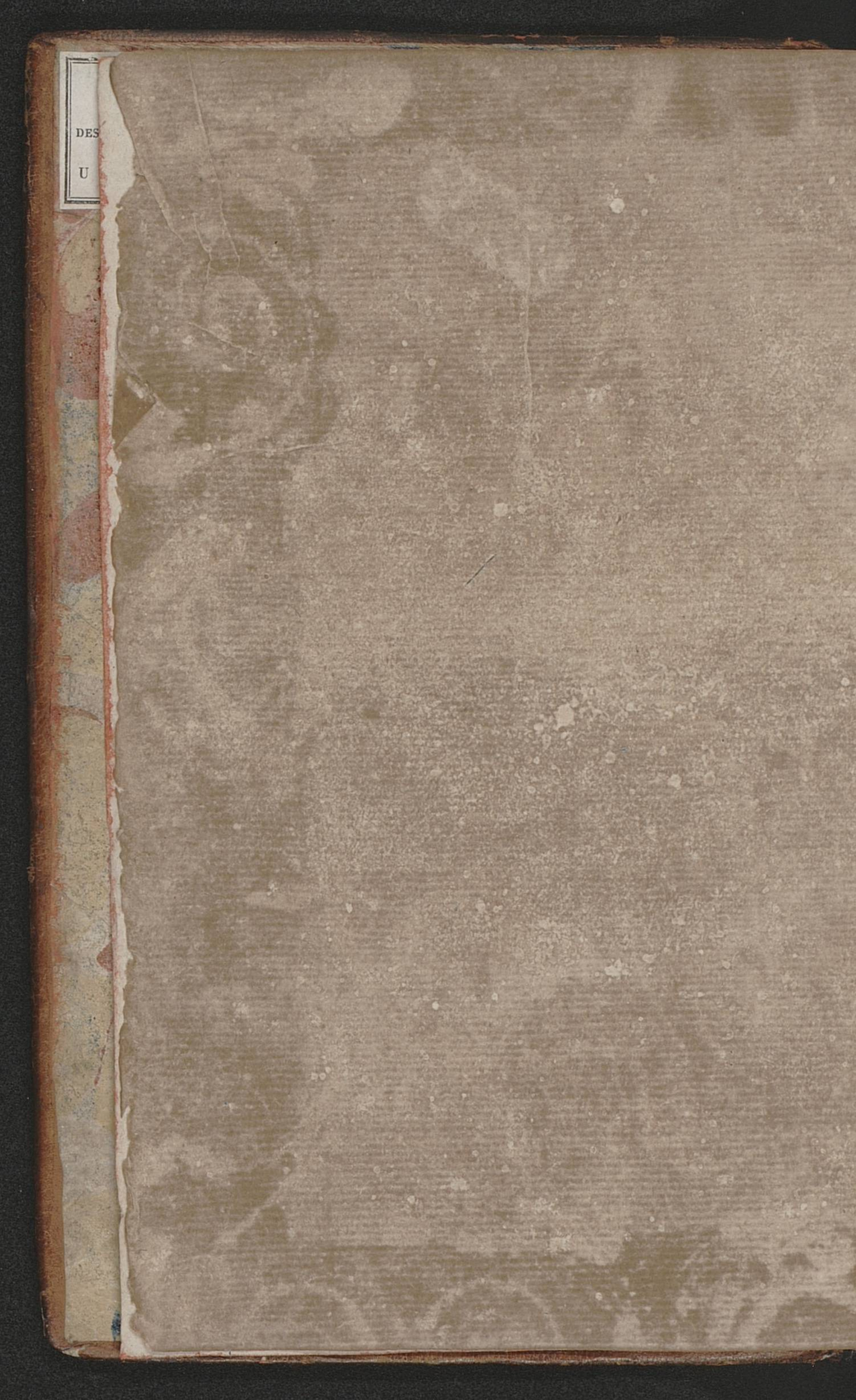


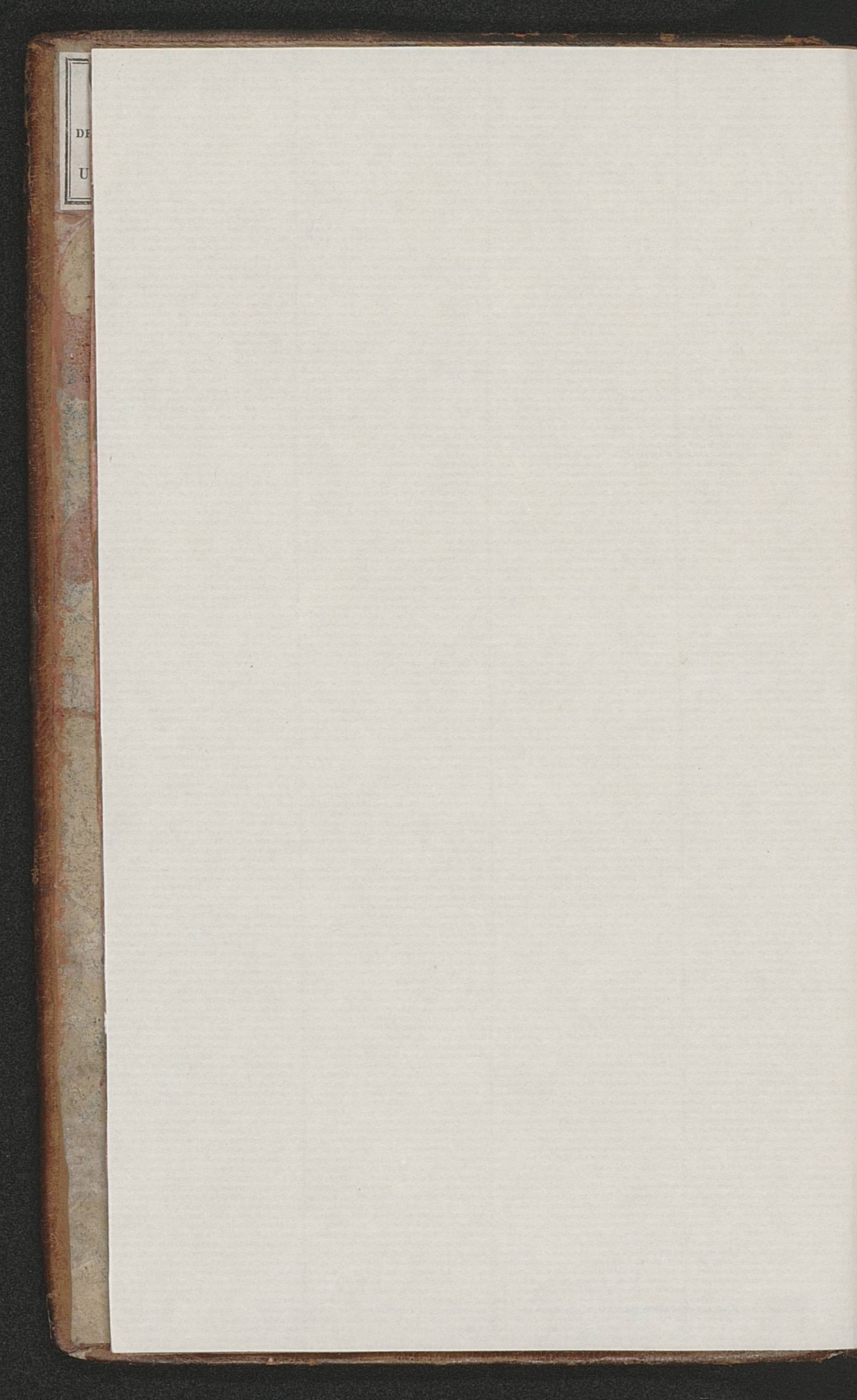





DES
U
Rs
LIPR




DES
U



(2) 21pp. 380pp. 8 pl.

ANALYSE

DES

INFINIMENT PETITS.

ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS

Par M. le Marquis DE L'HÔPITAL,

Suivie d'un nouveau Commentaire pour l'intelligence des endroits les plus difficiles de cet Ouvrage.

Par l'Auteur du Guide des jeunes Mathématiciens dans l'étude des Leçons de Mathématique de M. l'Abbé de la Caille.



A AVIGNON;
Chez la Veuve GIRARD & FRANÇOIS SEGUIN, Impr. Libraires, près la Place St. Didier.

Se trouve à Paris,

Chez
- JEAN DESAINT, Libraire, rue du Foin S. Jacques.
- CHARLES SAILLANT, Libraire, rue S. Jean de Beauvais.
- C. JOSEPH PANCKOUCKE, Libraire, rue, & à côté de la Comédie Françoise.
- DURAND *Neveu*, Libraire, rue S. Jacques.

M. DCC. LXVIII. [1768]

AVEC APPROBATION ET PERMISSION.

PRÉFACE

DE L'ÉDITEUR,

*Où l'on trouvera ce qu'on doit penser de l'*Analyse des Infiniment Petits*, & des divers Commentaires qui en ont été faits.*

IL est des hommes dont le nom seul fait l'éloge. M. le Marquis de l'*Hôpital* est de ce nombre ; aussi, en offrant au Public la troisieme édition du *Traité des Infiniment Petits*, ne nous jetterons-nous point dans le panégyrique de l'Auteur. Pour donner seulement en deux mots l'idée la plus étendue de ce rare & profond Génie, nous ferons remarquer qu'il a vécu dans un siécle où les Mathématiciens se proposoient, par maniere de défi, les problêmes les plus embrouillés ; & qu'il

ne se trouvoit dans le monde que M. M. *Nevvton*, *Leibnitz*, les deux *Bernoully*, *Huyghens*, & M. le Marquis de l'*Hôpital* qui fussent en état d'en donner la solution. Nous ajouterons que, lorsque M. *Huyghens* voulut s'adonner au calcul differentiel, il s'adressa à M. le Marquis de l'*Hôpital*, sous la conduite de qui il fit les progrès les plus surprenants dans la Géométrie sublime. La route que cet habile Maître lui fraya, nous la trouvons dans l'*Analyse des Infiniment Petits*; aussi cet Ouvrage, que le monde sçavant regardera toujours comme un chef-d'œuvre, est-il le seul livre que l'on puisse mettre avec succès entre les mains de ceux qui ont appris tout ce que l'on comprend dans ce siécle éclairé sous le nom d'*élémens de Geométrie & d'Algébre*. Je ne dissimulerai pas cependant qu'on a reproché à M. le Marquis de l'*Hôpital* de n'avoir écrit que pour les Sçavans, tellement rompus dans le calcul, qu'ils

entendent tout à demi mot. Ce fut pour mettre ſon Ouvrage à la portée des Commençans ordinaires, que M. *Crouzas* nous en donna, en 1721, le Commentaire en un volume *in*-4°., précédé de deux amples diſcours, dont l'un eſt ſur la nature des *Infiniment Petits*, & l'autre ſur le *Calcul des Puiſſances*. A peine ſon Commentaire vit-il le jour, qu'il s'empreſſa d'en envoyer un exemplaire à M. *Jean Bernoully*. Ce Sçavant l'examina ; & après y avoir découvert des bévues qu'on pardonneroit à peine à un écolier, il lui dit en propres termes (*a*) qu'il auroit mieux fait de lui envoyer ſon Commentaire en manuſcrit, avant que de le faire imprimer ; qu'il y auroit fait des remarques qui n'auroient pas été inutiles : il ajouta qu'il auroit dû changer pluſieurs de ſes manieres de commenter, & leur donner un

(*a*) *Les Œuvres de Jean Bernoully*, Tom. 4. pag. 160. & ſuiv.

autre tour, de peur que les ignorans ne prennent ſes explications dans un mauvais ſens, & ne cherchent par là l'occaſion de décrier l'*Analyſe des Infiniment Petits.*

Ce n'eſt pas là la ſeule critique qu'ait eu à eſſuyer le Commentaire de M. *Crouzas.* M. *Saurin*, Membre de l'Académie Royale des Sciences, démontre dans les Mémoires de cette célébre Compagnie (*a*) que le Commentateur eſt un guide dangereux dans la grande & difficile queſtion *de Maximis & Minimis*, & il l'exhorte à retoucher ſon Ouvrage dans une ſeconde édition. Le cas qu'a fait le Public de la premiere, a diſpenſé l'Auteur de nous en donner une ſeconde.

A peine le Commentaire de M. *Crouzas* commençoit-il à paroître, que la mort nous enleva le célébre *Varignon.* Ce grand Géométre, l'ami intime de M. le Marquis de l'*Hôpital*,

(*a*) *Année* 1723, *pag.* 234 & *ſuiv.*

avoit lu l'*Analyse des Infiniment Petits* avec l'attention la plus réfléchie. On lui trouva parmi ses papiers un manuscrit contenant non-seulement des explications des endroits les plus obscurs & les plus difficiles de ce Traité, mais encore des Additions considérables, des Propositions nouvelles, des Problêmes ajoutés à ceux de M. le Marquis de l'*Hôpital*, des Régles, des Constructions, des Méthodes differentes, &c. Ce précieux manuscrit fut donné au Public en l'année 1725 en un volume *in*-4°., sous le titre d'*Eclaircissements sur l'Analyse des Infiniment Petits*. Cet Ouvrage, tout excellent qu'il est, ne peut guere être mis entre les mains d'un Commençant; M. *Varignon* n'y éclaircit pour l'ordinaire que les points qui ont été capables de l'arrêter lui-même. D'ailleurs cet Ouvrage posthume a été imprimé avec si peu d'exactitude, qu'il seroit presque plus difficile de corriger les fautes dont il fourmille, que de lire sans Commentaire l'*Analyse des Infiniment Petits*.

L'Ouvrage de M. le Marquis de l'*Hôpital* doit ſe trouver comme néceſſairement dans la bibliothéque de tous les Mathématiciens. Les Sçavants en ont beſoin pour le conſulter, & pour ſe rappeller en peu de mots des propoſitions très compliquées, qu'il n'eſt que trop facile d'oublier. Les Commençans doivent en faire leur étude journaliere, lorſqu'ils veulent paſſer de la Géometrie ordinaire à la Géométrie ſublime : on ne peut ſe regarder comme Mathématicien, que lorſqu'on a lu avec goût l'*Analyſe des Infiniment Petits*.

Il nous paroit que l'édition que nous en donnons, ne peut manquer d'être favorablement accueillie. Les Sçavants, qui n'ont beſoin que du texte de l'Auteur, le trouveront au commencement du Volume, imprimé avec l'exactitude la plus ſcrupuleuſe. Les Notes que nous y avons ajoutées, & qui ne ſont qu'indiquées dans le corps de l'Ouvrage, aideront les Commençans à ſe paſſer de guide dans la route

épineuſe du calcul différentiel. Ces Notes ſont au nombre de cinquante-cinq. Les quatre premieres ſont pour la premiere ſection du Traité des *Infiniment Petits*. Les 21 ſuivantes ſervent de commentaire à la ſeconde ſection. L'importante queſtion *de Maximis & Minimis* que M. le Marquis de l'*Hôpital* a traitée dans ſa troiſieme ſection, eſt éclaircie par 12 Notes conſidérables. Un pareil nombre de Notes eſt deſtiné à commenter la matiere de la quatrieme ſection, c'eſt-à-dire, les *différences des différences*, & les ſept exemples qui y ont rapport. Enfin ce qu'il y a de difficile dans les ſix dernieres ſections ſe trouve expliqué dans les ſix dernieres Notes. Mais ce ne ſont là que des généralités, & il eſt néceſſaire d'entrer ici dans un détail beaucoup plus circonſtancié.

La premiere ſection de l'*Analyſe des Infiniment Petits* préſente, il eſt vrai, les régles du calcul différentiel; mais elle les préſente d'une maniere ſi con-

ciſe, qu'il eſt preſque impoſſible qu'un homme qui les lit pour la premiere fois, apprenne, ſans le ſecours d'un habile Maître, à différentier des produits compliqués, des quantités fractionnaires, des nombres affectés d'un ou pluſieurs ſignes radicaux, &c. Nous eſpérons qu'on nous ſçaura quelque gré d'avoir donné à ces régles, dans nos quatre premieres Notes, une étendue ſuffiſante, & de les avoir miſes à la portée de ceux qui ne ſçavent que les régles du calcul ordinaire.

M. le Marquis de l'*Hôpital* ſuppoſe dans ſa ſeconde ſection que le Lecteur ſe rappelle parfaitement, non-ſeulement les équations de toutes les eſpèces de *ſections coniques*, de quelque genre qu'elles ſoient; mais celles encore de la *cycloide*, de la *ſpirale*, de la *conchoide*, de la *ciſſoide*, de la *quadratrice*, de la *logarithmique ordinaire* & *ſpirale* &c. Nous avons cru rendre un véritable ſervice au commun des Lecteurs, en leur donnant une idée nette des courbes que nous venons de nommer, & en leur rappellant les

démonſtrations ſur leſquelles ſont fondées les équations qui les diſtinguent les unes des autres. C'eſt-là ce qu'il y a de plus intéreſſant dans les 21 Notes qui forment le commentaire de la ſeconde ſection.

Des 12 Notes que nous avons faites pour éclaircir la queſtion *de Maximis & Minimis*, celles qui ſont analogues aux articles 49, 58, 59 & 61, je veux dire, les Notes 28e, 35e, 36e & 37e, nous paroiſſent les plus importantes. En liſant la Note 28e, on ſe convaincra de plus en plus qu'il eſt bien rare qu'il faille ſe jetter dans l'infini, pour trouver le *Maximum* ou le *Minimum* d'une courbe dont l'équation eſt donnée. M. le Marquis de l'*Hôpital* ne s'y eſt jetté qu'une fois dans tout le cours de ſa troiſieme ſection, c'eſt à l'article 49; & la Note qui ſert de commentaire à cet article, prouve qu'il pouvoit arriver à ſon même réſultat, en allant par le chemin ordinaire.

La Note 35e, nous paroit prouver que M. le Marquis de l'*Hôpital* n'a

pas toujours pris le chemin le plus court, pour parvenir à la ſolution des problêmes qu'il propoſe. Quoiqu'il ne ſoit pas néceſſaire d'avoir recours à l'interſection du cercle & de l'hyperbole, pour réſoudre le problême qui fait la matiere de l'article 58, cependant nous avons cru devoir chercher le grand axe de la courbe dont l'équation eſt donnée dans cet article. Quelque critique, dans un moment de mauvaiſe humeur, auroit pu ſe croire en droit de nous reprocher que nous ne rejettions la méthode propoſée, que pour nous épargner la peine de conſtruire une hyperbole ſur une équation trouvée.

L'article 59 contient une équation du quatrieme degré. Nous avons calculé cette longue équation, & nous l'avons transformée en quelqu'une de celles qui ſe trouvent dans tous les livres élémentaires d'Algébre qui traitent des degrés ſupérieurs. Ces transformations ont fait la matiere de la 36e Note.

Enfin la 37e Note a rapport à l'article 61, dans lequel on propoſe de

trouver le jour du plus petit crépuscule, l'élévation du pole étant donnée. Comme nous sçavions que les M. M. *Bernoully* avoient resté plus de cinq ans (*a*) à résoudre ce fameux problême, nous n'avons rien oublié pour donner à cette Note toute la perfection dont elle étoit susceptible.

Jusqu'à présent M. le Marquis de l'*Hôpital* n'a employé que le calcul des *différences premieres*. Il fait dans les sept dernieres sections de son Ouvrage grand usage des *différences des différences*; aussi n'a-t-il pas manqué d'assigner les régles de ce calcul au commencement de sa quatrieme section. Nous avons donné assez d'étendue à notre 40[e] Note, pour mettre ces régles dans le plus grand jour. Nous prions le Lecteur de l'examiner avec soin, & d'appliquer à différents cas particuliers la formule générale qui sert à trouver la *différence seconde* d'une quantité quelconque élevée à une puissance quelconque. Nous

(*a*) *Œuvres de Jean Bernoully, Tom.* 1. *pag.* 64.

le prions encore de faire une attention ſpéciale aux Notes 41, 45 & 48. La premiere nous paroit néceſſaire pour l'intelligence de l'article 66, où l'on propoſe le problême qui conſiſte à *déterminer le point d'inflexion ou de rebrouſſement dans une courbe dont la nature eſt donnée*. Dans la ſeconde nous démontrons que la marque que donne M. le Marquis de l'*Hôpital* pour trouver le point de *rebrouſſement*, n'eſt rien moins qu'une marque sûre : c'eſt M. *Varignon* qui nous a fourni cette démonſtration. Enfin la troiſieme apprend à calculer les équations du cinquieme degré ; l'article 73 auquel cette Note a rapport, fournit une équation de cette eſpèce. Voilà ce que nous avons fait, pour mettre à la portée des Commençans ordinaires les quatre premieres ſections du Traité de l'*Analyſe des Infiniment Petits*. Nous ſommes perſuadés que quiconque nous aura ſuivi juſqu'à préſent, ſera en état de lire preſque ſans commentaire le reſte de l'Ouvrage. Auſſi n'avons-nous fait que 6 Notes pour les ſix dernieres

sections. L'on comprend que nous n'avons pas oublié dans ces Notes les *développées*, & les *caustiques* par réflexion & par refraction; ce sont là des courbes de la derniere importance.

Quoique nous ayons droit de regarder comme un ouvrage qui nous appartienne en propre, les additions dont nous venons de rendre compte au Public; nous nous ferons cependant un devoir de publier que la lecture des *éclaircissemens* de M. *Varignon* nous a fait naître la plupart des idées que nous avons mis en œuvre; & nous ajouterons que nous avons profité de quelques bons endroits qui se trouvent dans le *commentaire* de M. *Crouzas.* (*a*)

Mais quelles connoissances faut-il

(*a*) *Cet Auteur, quoiqu'il n'ait pas réussi à commenter M. le Marquis de l'Hôpital, auroit dû être traité avec un peu plus de ménagement par M. M. Bernoully & Saurin. Ses Traités de Géométrie & d'Algébre ne passent pas pour mauvais; & ce fut son mérite réel qui lui procura en différens tems les chaires de Philosophie de Groningue & de Lausanne, une place d'Associé étranger à l'Académie Royale des Sciences de Paris, & la charge de Gouverneur du Prince Frederic de Hesse Cassel, neveu du Roi de Suéde.*

avoir acquiſes pour lire avec ſuccès l'*Analyſe des Infiniment Petits* ? point d'autres que celles qui ſont renfermées dans les Traités élémentaires de Mathématiques. Ces Traités comprennent l'Arithmétique ordinaire & algébrique pouſſée juſqu'au calcul des radicaux, aux progreſſions & proportions, à la formation & à la ſommation des ſuites : l'Analyſe ou la ſcience des èquations de toute ſorte de degrés : la Géométrie ſpéculative & pratique : la Trigonométrie au moins rectiligne, en y comprenant la maniere de calculer les logarithmes non-ſeulement des ſinus, tangentes & ſécantes, mais ceux encore des nombres entiers & rompus : enfin le Traité des ſections coniques. Toutes ces connoiſſances ſe trouvent réunies dans les élémens d'Algébre & de Géométrie de M. l'Abbé *de la Caille*, & dans le commentaire que nous en avons ſous le titre : de *Guide des jeunes Mathématiciens dans l'étude des leçons de Mathématique* du même Auteur. Ce n'eſt qu'après la lecture de ces deux Ouvra-

ges, que je voudrois qu'on s'adonnât au calcul differentiel. Tout bon esprit sera alors en état d'y faire, avec les secours que nous lui fournissons, les plus sensibles progrès.

Les *Infiniment Petits* de M. le Marquis de l'*Hôpital* ont déja eu deux éditions, l'une en 1696, & l'autre en 1715. Celle-là fut faite sous les yeux de l'Auteur avec toute l'exactitude imaginable. Les 14 fautes qui s'y sont glissées ne peuvent induire le Lecteur en aucune erreur; elles sont indiquées à la fin du Volume. Pour l'édition de 1715, elle a été dirigée par un homme qui n'avoit pas apparemment les premieres idées de l'Algébre. L'on y trouve les fautes les plus grossieres & les plus propres à déconcerter un Commençant. Je pourrois en indiquer un très grand nombre; je me contenterai d'avertir ceux qui se la sont procurée, que les *exposants* qui devroient être négatifs, n'y ont pour l'ordinaire aucun signe, ce qui les met dans la classe des *exposants* positifs. Il suffit d'avoir la moindre idée de calcul, pour

ſentir combien un pareil *qui pro quo* eſt à craindre dans un livre d'Algébre. L'une & l'autre de ces éditions forment une brochure *in*-4°. de 181 *pages*, *ſur caractere S. Auguſtin.* L'on a fait la troiſieme édition ſur le même caractere. Mais le peu de matiere que fournit le texte de l'Auteur, & le deſir que l'on a eu de procurer, à peu de frais, à tous les Mathématiciens un Ouvrage dont la néceſſité eſt univerſellement reconnue, nous ont fait préférer le *format in*-8°. à l'ancien *format*. C'eſt rendre un véritable ſervice au Public, que de lui préſenter à un prix très-modique, en un volume d'environ 500 pages, orné d'un grand nombre de planches en taille douce, l'*Analyſe des Infiniment Petits*, & le *commentaire* des endroits les plus difficiles de cet Ouvrage immortel. L'Imprimeur a ſujet d'eſpérer que l'on ſera content de la partie typographique. Il n'a rien épargné, pour que la beauté de l'édition répondît à la beauté des choſes que le Livre renferme.

PRÉFACE

DE L'AUTEUR.

L'ANALYSE qu'on explique dans cet Ouvrage, ſuppoſe la commune; mais elle en eſt fort différente. L'Analyſe ordinaire ne traite que des grandeurs finies : celle-ci pénétre juſques dans l'infini même. Elle compare les différences infiniment petites des grandeurs finies; elle découvre les rapports de ces différences, & par-là elle fait connoître ceux des grandeurs finies, qui comparées avec ces infiniment petits ſont comme autant d'infinis. On peut même dire que cette Analyſe s'étend au-delà de l'infini : car elle ne ſe borne pas aux différences infiniment petites; mais elle découvre les rapports des différences de ces différences, ceux encore des différences troiſiemes, quatriemes, & ainſi de ſuite, ſans trouver jamais de terme qui la puiſſe arrêter. De ſorte qu'elle n'embraſſe pas ſeulement l'in-

fini; mais l'infini de l'infini, ou une infinité d'infinis.

Une Analyſe de cette nature pouvoit ſeule nous conduire juſqu'aux véritables principes des lignes courbes. Car les courbes n'étant que des polygones d'une infinité de côtés, & ne différant entr'elles que par la différence des angles que ces côtés infiniment petits font entr'eux ; il n'appartient qu'à l'Analyſe des infiniment petits de déterminer la poſition de ces côtés pour avoir la courbure qu'ils forment, c'eſt-à-dire les tangentes de ces courbes, leurs perpendiculaires, leurs points d'infléxion ou de rebrouſſement, les rayons qui s'y réfléchiſſent, ceux qui s'y rompent, &c.

Les polygones inſcrits ou circonſcrits aux courbes, qui par la multiplication infinie de leurs côtés, ſe confondent enfin avec elles, ont été pris de tout temps pour les courbes mêmes. Mais on en étoit demeuré là : ce n'eſt que depuis la découverte de l'Analyſe dont il s'agit ici, que l'on a bien ſenti l'étendue & la fécondité de cette idée.

Ce que nous avons des Anciens ſur ces matieres, principalement d'*Archimede*, eſt aſſurément digne d'admiration. Mais outre qu'ils n'ont touché qu'à fort peu de courbes, qu'ils n'y ont même touché que légérement; ce ne ſont preſque par tout que propoſitions particulieres & ſans ordre, qui ne font appercevoir aucune méthode réguliere & ſuivie. Ce n'eſt pas cependant qu'on leur en puiſſe faire un reproche légitime : ils ont eu beſoin d'une extrême force de génie (*a*) pour percer à travers tant d'obſcurités, & pour entrer les premiers dans des païs entierement inconnus. S'ils n'ont pas été loin, s'ils ont marché par de longs circuits; du moins, quoi qu'en diſe (*b*) *Viette*, ils ne ſe ſont point égarés : & plus les chemins qu'ils

(*a*) *Archimedis de lineis ſpiralibus tractatum cùm bis terque legiſſem, totaſque animi vires intendiſſem, ut ſubtiliſſimarum demonſtrationum de ſpiralium tangentibus artificium adſequerer; nuſquam tamen, ingenuè fatebor, ab earum contemplatione ita certus receſſi, quin ſcrupulus animo ſemper hæreret, vim illius demonſtrationis me non percepiſſe totam, &c.* Bullialdus Præf. de lineis ſpiralibus.

(*b*) *Si verè Archimedes, fallaciter concluſit Euclides, &c.* Supl. Geom.

ont tenus étoient difficiles & épineux, plus ils ſont admirables de ne s'y pas être perdus. En un mot il ne paroît pas que les Anciens en ayent pu faire davantage pour leur temps : ils ont fait ce que nos bons eſprits auroient fait en leur place ; & s'ils étoient à la nôtre, il eſt à croire qu'ils auroient les mêmes vûes que nous. Tout cela eſt une ſuite de l'égalité naturelle des eſprits & de la ſucceſſion néceſſaire des découvertes.

Ainſi il n'eſt pas ſurprenant que les Anciens n'ayent pas été plus loin ; mais on ne ſçauroit aſſez s'étonner que de grands hommes, & ſans doute d'auſſi grands hommes que les Anciens, en ſoient ſi long-temps demeurés là ; & que par une admiration preſque ſuperſtitieuſe pour leurs ouvrages, ils ſe ſoient contentés de les lire & de les commenter, ſans ſe permettre d'autre uſage de leurs lumieres, que ce qu'il en falloit pour les ſuivre ; ſans oſer commettre le crime de penſer quelquefois par eux-mêmes, & de porter leur vûe au-delà de ce que les Anciens avoient découvert. De cette maniere bien des gens

travailloient, ils écrivoient, les Livres ſe multiplioient, & cependant rien n'avançoit : tous les travaux de plusieurs ſiécles n'ont abouti qu'à remplir le monde de reſpectueux commentaires & de traductions répetées d'originaux ſouvent aſſez mépriſables.

Tel fut l'état des Mathématiques, & ſur-tout de la Philoſophie, juſqu'à M. *Deſcartes*. Ce grand homme pouſſé par ſon génie & par la ſupériorité qu'il ſe ſentoit, quitta les Anciens pour ne ſuivre que cette même raiſon que les Anciens avoient ſuivie ; & cette heureuſe hardieſſe, qui fut traitée de révolte, nous valut une infinité de vûes nouvelles & utiles ſur la Phyſique & ſur la Géométrie. Alors on ouvrit les yeux, & l'on s'aviſa de penſer.

Pour ne parler que des Mathématiques, dont il eſt ſeulement ici queſtion, M. *Deſcartes* commença où les Anciens avoient fini, & il débuta par la ſolution d'un Problême où *Pappus* dit (*a*) qu'ils étoient tous demeurés. On ſçait juſqu'où

(*a*) *Collect. Mathem. Lib. 7. initio.*

il a porté l'Analyse & la Géométrie, & combien l'alliage qu'il en a fait, rend facile la solution d'une infinité de Problêmes qui paroissoient impénétrables avant lui. Mais comme il s'appliquoit principalement à la résolution des égalités, il ne fit d'attention aux courbes, qu'autant qu'elles lui pouvoient servir à en trouver les racines : de sorte que l'Analyse ordinaire lui suffisant pour cela, il ne s'avisa point d'en chercher d'autre. Il n'a pourtant pas laissé de s'en servir heureusement dans la recherche des tangentes ; & la méthode qu'il découvrit pour cela lui parut si belle, qu'il ne fit point difficulté de dire, (a) que *ce Problême étoit le plus utile & le plus général, non-seulement qu'il sçût, mais même qu'il eût jamais désiré de sçavoir en Géométrie.*

Comme la Géométrie de M. *Descartes* avoit mis la construction des Problêmes par la résolution des égalités fort à la mode, & qu'elle avoit donné de grandes ouvertures pour cela ; la plupart des Géometres s'y appliquerent, ils y firent aussi

(a) Geomet. Liv. 2.

de nouvelles découvertes, qui s'augmentent & se perfectionnent encore tous les jours.

Pour M. *Pascal*, il tourna ses vues de tout un autre côté : il examina les courbes en elles-mêmes, & sous la forme de polygone ; il rechercha les longueurs de quelques-unes, l'espace qu'elles renferment, le solide que ces espaces décrivent, les centres de gravité des unes & des autres, &c. Et par la considération seule de leurs élémens, c'est-à-dire des infiniment petits, il découvrit des Méthodes générales & d'autant plus surprenantes, qu'il ne paroît y être arrivé qu'à force de tête & sans Analyse.

Peu de temps après la publication de la Méthode de M. *Descartes* pour les tangentes, M. *de Fermat* en trouva aussi une, que M. *Descartes* a enfin avoué (*a*) lui-même être plus simple en bien des rencontres que la sienne. Il est pourtant vrai qu'elle n'étoit pas encore aussi simple que M. *Barrovv* l'a rendue depuis en considérant de plus près

(*a*) *Lett. 71, Tom. 3.*

la nature des polygones, qui présente naturellement à l'esprit un petit triangle fait d'une particule de courbe, comprise entre deux appliquées infiniment proches, de la différence de ces deux appliquées, & de celle des coupées correspondantes; & ce triangle est semblable à celui qui se doit former de la tangente, de l'appliquée, & de la soutangente: de sorte que par une simple Analogie cette derniere Méthode épargne tout le calcul que demande celle de M. *Descartes*, & que cette Méthode, elle-même, demandoit auparavant.

M. *Barrovv* (*a*) n'en demeura pas là, il inventa aussi une espece de calcul propre à cette Méthode; mais il lui falloit, aussi-bien que dans celle de M. *Descartes*, ôter les fractions, & faire évanouir tous les signes radicaux pour s'en servir.

Au défaut de ce calcul est survenu celui du célébre (*b*) M. *Leibnitz*; & ce sçavant Géométre a commencé où M. *Barrovv*, & les autres avoient fini. Son calcul l'a mené dans des pays jusqu'ici inconnus;

(*a*) *Lect. Geomet. pag.* 80.
(*b*) *Acta Erud. Lips. an.* 1684. *pag.* 467.

& il y a fait des découvertes qui font l'étonnement des plus habiles Mathématiciens de l'Europe. M^rs. *Bernoulli* ont été les premiers qui se sont apperçus de la beauté de ce calcul : ils l'ont porté à un point qui les a mis en état de surmonter des difficultés qu'on n'auroit jamais osé tenter auparavant.

L'étendue de ce calcul est immense : il convient aux courbes mécaniques, comme aux géométriques ; les signes radicaux lui sont indifférens ; & même souvent commodes ; il s'étend à tant d'indéterminées qu'on voudra ; la comparaison des infiniment petits de tous les genres lui est également facile. Et de là naissent une infinité de découvertes surprenantes par rapport aux tangentes tant courbes que droites, aux questions *De maximis & minimis*, aux points d'infléxion & de rebroussement des courbes, aux dèveloppées, aux caustiques par réfléxion ou par réfraction, &c. comme on le verra dans cet Ouvrage.

Je le divise en dix Sections. La premiere contient les principes du calcul des différences. La seconde fait voir de quelle

maniere l'on s'en doit ſervir pour trouver les tangentes de toutes ſortes de courbes, quelque nombre d'indéterminées qu'il y ait dans l'équation qui les exprime, quoique M. *Craige* (*a*) n'ait pas crû qu'il pût s'étendre juſqu'aux courbes mécaniques ou tranſcendantes. La troiſieme, comment il ſert à réſoudre toutes les queſtions *De maximis & minimis*. La quatrieme, comment il donne les points d'infléxion & de rebrouſſement des courbes. La cinquieme en découvre l'uſage pour trouver les dévelopées de M. *Hugens*, dans toutes ſortes de courbes. La ſixieme & la ſeptieme font voir comment il donne les cauſtiques, tant par réfléxion que par réfraction, dont l'illuſtre M. *Tſchirnhaus* eſt l'inventeur, & pour toutes ſortes de courbes encore. La huitieme en fait voir encore l'uſage pour trouver les points des lignes courbes qui touchent une infinité de lignes données, de poſition, droites ou courbes. La neuvieme contient la ſolution de quelques Problêmes qui dépendent des découvertes

(*a*) *De figurarum curvilinearum quadraturis, part.* 2.

précédentes. Et la dixieme consiste dans une nouvelle maniere de se servir du calcul des différences pour les courbes géométriques : d'où l'on déduit la Méthode de Mrs *Descartes* & *Hudde*, laquelle ne convient qu'à ces sortes de courbes.

Il est à remarquer que dans les Sections 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, il n'y a que très-peu de propositions ; mais elles sont toutes générales, & comme autant de Méthodes dont il est aisé de faire l'application à tant de propositions particulieres qu'on voudra : je la fais seulement sur quelques exemples choisis, persuadé qu'en fait de Mathématique il n'y a à profiter que dans les Méthodes, & que les Livres qui ne consistent qu'en détail ou en propositions particulieres, ne sont bons qu'à faire perdre du temps à ceux qui les font, & à ceux qui les lisent. Aussi n'ai-je ajouté les Problêmes de la Section neuvieme, que parce qu'ils passent pour curieux, & qu'ils sont très-universels. Dans la dixieme Section ce ne sont encore que des Méthodes que le calcul des différences donne à la maniere de Mrs *Descartes* & *Hudde* ; & si

elles ſont ſi limitées, on voit par toutes les précédentes que ce n'eſt pas un défaut de ce calcul, mais de la Méthode Cartéſienne à laquelle on l'aſſujettit. Au contraire rien ne prouve mieux l'uſage immenſe de ce calcul, que toute cette varieté de Méthodes; & pour peu d'attention qu'on y faſſe, l'on verra qu'il tire tout ce qu'on peut tirer de celle de M^rs^ *Deſcartes* & *Hudde*, & que la preuve univerſelle qu'il donne de l'uſage qu'on y fait des progreſſions arithmétiques, ne laiſſe plus rien à ſouhaiter pour l'infaillibilité de cette derniere Méthode.

J'avois deſſein d'y ajouter encore une Section pour faire ſentir auſſi le merveilleux uſage de ce calcul dans la Phyſique, juſqu'à quel point de préciſion il la peut porter, & combien les Mécaniques en peuvent retirer d'utilité. Mais une maladie m'en a empêché: Le Public n'y perdra pourtant rien, & il l'aura quelque jour même avec uſure.

Dans tout cela il n'y a encore que la premiere partie du calcul de M. *Leibnitz*, laquelle conſiſte à deſcendre des grandeurs

entiéres à leurs différences infiniment petites, & à comparer entr'eux ces infiniment petits de quelque genre qu'ils ſoient: c'eſt ce qu'on appelle *Calcul différentiel.* Pour l'autre partie, qu'on appelle *Calcul intégral*, & qui conſiſte à remonter de ces infiniment petits aux grandeurs ou aux touts dont ils ſont les différences, c'eſt-à-dire, à en trouver les ſommes, j'avois auſſi deſſein de le donner. Mais M. *Leibnitz* m'ayant écrit qu'il y travailloit dans un Traité qu'il intitule *De Scientiâ infiniti*, je n'ai eu garde de priver le Public d'un ſi bel Ouvrage qui doit renfermer tout ce qu'il y a de plus curieux pour la Méthode inverſe des tangentes, pour les rectifications des courbes, pour la quadrature des eſpaces qu'elles renferment, pour celles des ſurfaces des corps qu'elles décrivent, pour la dimenſion de ces corps, pour la découverte des centres de gravité, &c. Je ne rends même ceci public, que parce qu'il m'en a prié par ſes Lettres, & que je le crois néceſſaire pour préparer les eſprits à comprendre tout ce qu'on pourra découvrir dans la ſuite ſur ces matières.

Au reste je reconnois devoir beaucoup aux lumieres de M[rs] *Bernoulli*, sur-tout à celles du jeune présentement Professeur à Groningue. Je me suis servi sans façon de leurs découvertes & de celles de M. *Leibnitz*. C'est pourquoi je consens qu'ils en revendiquent tout ce qu'il leur plaira, me contentant de ce qu'ils voudront bien me laisser.

C'est encore une justice dûe au sçavant M. *Nevvton*, & que M. *Leibnitz* lui a rendue (*a*) lui-même: Qu'il avoit aussi trouvé quelque chose de semblable au calcul differentiel, comme il paroît par l'excellent Livre intitulé, *Philosophiæ naturalis principia Mathematica*, qu'il nous donna en 1687, lequel est presque tout de ce calcul. Mais la Caractéristique de M. *Leibnitz* rend le sien beaucoup plus facile & plus expéditif; outre qu'elle est d'un secours merveilleux en bien des rencontres.

Comme l'on imprimoit la derniere feuille de ce Traité, le Livre de M. *Nieuvventiit* m'est tombé entre les mains. Son titre, *Analysis infinitorum*, m'a donné

(*a*) *Journal des Sçavans du 30 Août 1694.*

la curiosité de le parcourir : mais j'ai trouvé qu'il étoit fort différent de celui-ci ; car outre que cet Auteur ne se sert point de la Caractéristique de M. *Leibnitz*, il rejette absolument les différences secondes, troisiemes, &c. Comme j'ai bâti la meilleure partie de cet Ouvrage sur ce fondement, je me croirois obligé de répondre à ses objections, & de faire voir combien elles sont peu solides, si M. *Leibnitz* n'y avoit déja pleinement satisfait dans les Actes (*a*) de Leypsick. D'ailleurs les deux demandes ou suppositions que j'ai faites au commencement de ce Traité, & sur lesquelles seules il est appuyé, me paroissent si évidentes, que je ne crois pas qu'elles puissent laisser aucun doute dans l'esprit des Lecteurs attentifs. Je les aurois même pu démontrer facilement à la maniere des Anciens, si je ne me fusse proposé d'être court sur les choses qui sont déja connues, & de m'attacher principalement à celles qui sont nouvelles.

(*a*) *Acta Erud. an.* 1695. *pag.* 310 & 369.



ANALYSE DES INFINIMENT PETITS.



DU CALCUL DES DIFFERENCES.

SECTION I.

Où l'on donne les Regles de ce Calcul.

DÉFINITION I.

On appelle quantités *variables* celles qui augmentent ou diminuent continuellement ; & au contraire quantités *constantes* celles qui demeurent les mêmes pendant que les autres changent. Ainsi dans une parabole les appliquées & les coupées sont des quantités variables, au lieu que le paramétre est une quantité constante.

DÉFINITION II.

La portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement, en est appellée la *Différence*. Soit, par exemple, une ligne courbe quelconque AMB, (*Fig.* 1. *Pl.* 1.) qui ait pour axe ou diamétre la ligne AC, & pour une de ses appliquées la droite PM; & soit une autre appliquée pm infiniment proche de la premiere. Cela posé, si l'on méne MR paralele à AC; les cordes AM, Am; & qu'on décrive du centre A, de l'intervalle AM le petit arc de cercle MS: Pp sera la différence de AP; Rm celle de PM; Sm celle de AM, & Mm celle de l'arc AM. De même le petit triangle MAm qui a pour base l'arc Mm, sera la difference du segment AM; & le petit espace MPpm, celle de l'espace compris par les droites AP, PM, & par l'arc AM.

COROLLAIRE.

1. IL est évident que la différence d'une quantité constante est nulle ou zero: ou (ce qui est la même chose) que les quantités constantes n'ont point de différence.

AVERTISSEMENT.

On se servira dans la suite de la note ou caractéristique d *pour marquer la différence d'une quantité variable que l'on exprime par une seule lettre; & pour éviter la confusion, cette note* d *n'aura point d'autre usage dans la suite de ce calcul. Si l'on nomme par exemple les variables* AP, x; PM, y;

A M, z; *l'arc* A M, u; *l'espace mixtiligne* AMP, s; *&* *le segment* A M, t: d x *exprimera la valeur de* P p, d y *celle de* R m, d z *celle de* S m, du *celle du petit arc* M m, d s *celle du petit espace* MPpm, *&* d t *celle du petit triangle mixtiligne* M A m.

I. DEMANDE OU SUPPOSITION.

2. ON demande qu'on puisse prendre indifférem-ment l'une pour l'autre deux quantités qui ne dif-férent entr'elles que d'une quantité infiniment pe-tite : ou (ce qui est la même chose) qu'une quan-tité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une autre quantité infiniment moindre qu'elle, puisse être considérée comme demeurant la même. On demande, par exemple, qu'on puisse prendre A *p* pour A P, *pm* pour P M, l'espace A *pm* pour l'es-pace A P M, le petit espace M P *p m* pour le pe-tit rectangle M P *p* R, le petit secteur A M *m* pour le petit triangle A M S, l'angle *p* A *m* pour l'angle P A M, &c. (*Consultez la Note premiere.*)

II. DEMANDE OU SUPPOSITION.

3. ON demande qu'une ligne courbe puisse être considérée comme l'assemblage d'une infinité de lignes droites, chacune infiniment petite : ou (ce qui est la même chose) comme un polygône d'un nombre infini de côtés, chacun infiniment petit, lesquels déterminent par les angles qu'ils font en-tr'eux, la courbure de la ligne. On demande, par exemple, que la portion de courbe M*m*, & l'arc de cercle MS, puissent être considérés comme des lignes droites à cause de leur infinie petitesse, ensorte que

le petit triangle mSM puisse être censé rectiligne.

AVERTISSEMENT.

On suppose ordinairement dans la suite que les dernieres lettres de l'alphabet, z, y, x, *&c. marquent des quantités variables ; & au contraire que les premieres* a, b, c, *&c. marquent des quantités constantes : de sorte que* x *devenant* x + dx ; y, z, *&c. deviennent* y + dy, z + dz, *&c.* (*Art.* 1.) *Et* a, b, c, *&c. demeurent les mêmes* a, b, c, &c.

PROPOSITION I.

PROBLÉME.

4. PRENDRE *la différence de plusieurs quantités ajoutées ensemble, ou soustraites les unes des autres.*

Soit $a + x + y - z$ dont il faut prendre la différence. Si l'on suppose que x soit augmentée d'une portion infiniment petite, c'est-à-dire qu'elle devienne $x + dx$; y deviendra alors $y + dy$; & z, $z + dz$; pour la constante a, (*Art.* 1.) elle demeurera la même a : de sorte que la quantité proposée $a + x + y - z$ deviendra $a + x + dx + y + dy - z - dz$; & sa différence, que l'on trouvera en la retranchant de cette derniere, sera $dx + dy - dz$. Il en est ainsi des autres ; ce qui donne cette regle.

REGLE I.

Pour les quantités ajoutées, ou soustraites.

On prendra la différence de chaque terme de la quantité proposée, & retenant les mêmes signes,

on en composera une autre quantité qui sera la différence cherchée.

PROPOSITION II.

PROBLÉME.

5. PRENDRE *la différence d'un produit fait de plusieurs quantités multipliées les unes par les autres.*

1°. La difference de xy est $ydx + xdy$. Car y devient $y + dy$, lorsque x devient $x + dx$; & partant xy devient alors $xy + ydx + xdy + dxdy$, qui est le produit de $x + dx$ par $y + dy$, & sa différence sera $ydx + xdy + dxdy$, c'est-à-dire (*Art.* 2.) $ydx + xdy$, puisque $dxdy$ est une quantité infiniment petite par rapport aux autres termes ydx, & xdy; car si l'on divise, par exemple, ydx & $dxdy$ par dx, on trouve d'une part y, & de l'autre dy qui en est la différence, & par conséquent infiniment moindre qu'elle. D'où il suit que la différence du produit de deux quantités est égale au produit de la différence de la premiere de ces quantités par la seconde, plus au produit de la différence de la seconde par la premiere.

2°. La différence de xyz est $yzdx + xzdy + xydz$. Car en considérant le produit xy comme une seule quantité, il faudra, comme l'on vient de prouver, prendre le produit de sa différence $ydx + xdy$ par la seconde z (ce qui donne $yzdx + xzdy$) plus le produit de la différence dz de la seconde z par la premiere xy (ce qui donne $xydz$); & partant la différence de xyz sera $yzdx + xzdy + xydz$.

3°. La différence de $xyzu$ eſt $uyzdx + uxzdy + uxydz + xyzdu$. Ce qui ſe prouve comme dans le cas précédent, en regardant le produit xyz comme une ſeule quantité. Il en eſt ainſi des autres à l'infini, d'où l'on forme cette régle.

RÉGLE II.

Pour les quantités multipliées.

La différence du produit de pluſieurs quantités multipliées les unes par les autres, eſt égale à la ſomme des produits de la différence de chacune de ces quantités par le produit des autres.

Ainſi la différence de ax eſt $xo + adx$, c'eſt-à-dire adx. Celle de $\overline{a+x} \times \overline{b-y}$ eſt $bdx - ydx - ady - xdy$. (*Conſultez la note ſeconde.*)

PROPOSITION III.

PROBLÉME.

6. PRENDRE *la différence d'une fraction quelconque.*

La différence de $\frac{x}{y}$ eſt $\frac{ydx - xdy}{yy}$. Car ſuppoſant $\frac{x}{y} = z$, on aura $x = yz$, & comme ces deux quantités variables x & yz doivent toujours être égales entr'elles, ſoit qu'elles augmentent ou diminuent, il s'enſuit que leur différence, c'eſt-à-dire, leurs accroiſſemens ou diminutions ſeront auſſi égales entr'elles; & partant (*Art.* 5.) on aura $dx = ydz + zdy$, & $dz = \frac{dx - zdy}{y} = \frac{ydx - xdy}{yy}$ en mettant pour z ſa valeur $\frac{x}{y}$. Ce qu'il falloit, &c. d'où l'on forme cette régle.

REGLE III.

Pour les quantités divisées, ou pour les fractions.

La différence d'une fraction quelconque est égale au produit de la différence du numérateur par le dénominateur, moins le produit de la différence du dénominateur par le numérateur : le tout divisé par le quarré du dénominateur.

Ainsi la différence de $\frac{a}{x}$ sera $\frac{-adx}{xx}$, celle de $\frac{x}{a+x}$ sera $\frac{adx}{aa+2ax+xx}$. (*Consultez la note troisieme.*)

PROPOSITION IV.

PROBLÊME.

7. PRENDRE *la différence d'une puissance quelconque parfaite ou imparfaite d'une quantité variable.*

Il est nécessaire afin de donner une régle générale qui serve pour les puissances parfaites & imparfaites, d'expliquer l'analogie qui se rencontre entre leurs exposants.

Si l'on propose une progression géométrique dont le premier terme soit l'unité, & le second une quantité quelconque x, & qu'on dispose par ordre sous chaque terme son exposant, il est clair que ces exposans formeront une progression arithmétique.

Prog. géom. $1, x, xx, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7$, &c.
Prog. arith. $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, &c.

Et si l'on continue la progression géométrique au dessous de l'unité, & l'arithmétique au dessous de zero, les termes de celle-ci seront les exposans de ceux ausquels ils répondent dans l'autre.

Ainsi -1 est l'exposant de $\frac{1}{x}$, -2 celui de $\frac{1}{xx}$, &c.

Prog. géom. x, 1, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{xx}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^4}$, &c.

Prog. arith. 1, 0, -1, -2, -3, -4, &c.

Mais si l'on introduit quelque nouveau terme dans la progression géométrique, il faudra pour avoir son exposant, en introduire un semblable dans l'arithmétique.

Ainsi $\sqrt[2]{x}$ aura pour exposant $\frac{1}{2}$: $\sqrt[3]{x}$, $\frac{1}{3}$: $\sqrt[5]{x^4}$, $\frac{4}{5}$: $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$, $-\frac{3}{2}$: $\frac{1}{\sqrt[5]{x^5}}$, $-\frac{5}{3}$: $\frac{1}{\sqrt{x^7}}$, $-\frac{7}{2}$: &c. de sorte que ces expressions $\sqrt{x}$ & $x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{x}$ & $x^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[5]{x^4}$ & $x^{\frac{4}{5}}$; $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ & $x^{-\frac{3}{2}}$, &c. ne signifient que la même chose.

Prog. géom. 1, $\sqrt{x}$, x. 1, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[3]{xx}$, x. 1, $\sqrt[5]{x}$, $\sqrt[5]{xx}$, $\sqrt[5]{x^3}$, $\sqrt[5]{x^4}$, x.

Prog. arith. 0, $\frac{1}{2}$, 1. 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1. 0, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, 1. $= \frac{5}{5}$

Prog. géom. $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$, $\frac{1}{xx}$. $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$, $\frac{1}{xx}$. $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{\sqrt{x^7}}$, $\frac{1}{x^4}$.

Prog. arith. -1, $-\frac{3}{2}$, -2. -1, $-\frac{4}{3}$, $-\frac{5}{3}$, -2. -3, $-\frac{7}{2}$, -4.

Où l'on voit que de même que $\sqrt{x}$ est moyenne géométrique entre 1 & x, de même aussi $\frac{1}{2}$ est moyenne arithmétique entre leurs exposans zero & 1 : & de même que $\sqrt[3]{x}$ est la premiere des deux moyennes géométriquement proportionnelles entre 1 & x, de même aussi $\frac{1}{3}$ est la premiere des deux moyennes arithmétiquement proportionnelles entre leurs exposans zero & 1 : & il en est ainsi des au-

tres. Or il ſuit de la nature de ces deux progreſſions.

1°. Que la ſomme des expoſans de deux termes quelconques de la progreſſion géométrique ſera l'expoſant du terme qui en eſt le produit. Ainſi x^{4+3} où x^7 eſt le produit de x^3 par x^4, & $x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$ où $x^{\frac{5}{6}}$ eſt le produit de $x^{\frac{1}{2}}$ par $x^{\frac{1}{3}}$, & $x^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}$ où $x^{-\frac{2}{15}}$ eſt le produit de $x^{-\frac{1}{3}}$ par $x^{\frac{1}{5}}$, &c. De même $x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}$ où $x^{\frac{2}{3}}$ eſt le produit de $x^{\frac{1}{3}}$ par lui-même, c'eſt-à-dire ſon quarré, & x^{+2+2+2} où x^6 eſt le produit de x^2 par x^2 par x^2, c'eſt-à-dire ſon cube, & $x^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}$ où $x^{-\frac{4}{3}}$ eſt la quatrieme puiſſance de $x^{-\frac{1}{3}}$, & il en eſt ainſi des autres puiſſances. D'où il eſt évident que le double, le triple, &c. de l'expoſant d'un terme quelconque de la progreſſion géométrique eſt l'expoſant du quarré, du cube, &c. de ce terme ; & partant que la moitié, le tiers, &c. de l'expoſant d'un terme quelconque de la progreſſion géométrique ſera l'expoſant de la racine quarrée, cubique, &c. de ce terme.

2°. Que la différence des expoſans de deux termes quelconques de la progreſſion géométrique ſera l'expoſant du quotient de la diviſion de ces termes. Ainſi $x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{6}}$ ſera l'expoſant du quotient de la diviſion de $x^{\frac{1}{2}}$ par $x^{\frac{1}{3}}$, & $x^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} = x^{-\frac{7}{12}}$ ſera l'expoſant du quotient de la diviſion de $x^{-\frac{1}{3}}$ par $x^{\frac{1}{4}}$; où l'on voit que c'eſt la

même chose de multiplier $x^{-\frac{1}{3}}$ par $x^{-\frac{1}{4}}$ que de diviser $x^{-\frac{1}{3}}$ par $x^{\frac{1}{4}}$. Il en est ainsi des autres. Ceci bien entendu, il peut arriver deux différens cas.

Premier cas, lorsque la puissance est parfaite, c'est-à-dire lorsque son exposant est un nombre entier. La différence de xx est $2xdx$, de x^3 est $3xxdx$, de x^4 est $4x^3dx$, &c. Car le quarré de x n'étant autre chose que le produit de x par x, sa différence (*Art.* 5.) sera $xdx + xdx$, c'est-à-dire $2xdx$. De même le cube de x n'étant autre chose que le produit de x par x par x, sa différence (*Art.* 5.) sera $xxdx + xxdx + xxdx$, c'est-à-dire $3xxdx$; & comme il en est ainsi des puissances à l'infini, il s'ensuit que si l'on suppose que m marque un nombre entier tel que l'on voudra, la différence de x^m sera $mx^{m-1}dx$.

Si l'exposant est négatif, on trouvera que la différence de x^{-m} ou de $\frac{1}{x^m}$ sera $\frac{-mx^{m-1}dx}{x^{2m}} = -mx^{-m-1}dx$.

Second cas, lorsque la puissance est imparfaite, c'est-à-dire lorsque son exposant est un nombre rompu. Soit proposé de prendre la différence de $\sqrt[n]{x^m}$ ou $x^{\frac{m}{n}}$ ($\frac{m}{n}$ exprime un nombre rompu quelconque) on supposera $x^{\frac{m}{n}} = z$, & en élevant chaque membre à la puissance n on aura $x^m = z^n$, & en prenant les différences comme l'on vient d'expliquer dans le premier cas, on trouvera $mx^{m-1}dx$

$= nz^{n-1}dz$, & $dz = \frac{mx^{m-1}dx}{nz^{n-1}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1} dx$, ou $\frac{m}{n}dx\sqrt[n]{x^{m-n}}$, en mettant à la place de nz^{n-1} sa valeur $nx^{m-\frac{m}{n}}$. Si l'expoſant eſt négatif, on trouvera que la différence de $x^{-\frac{m}{n}}$ ou de $\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$ ſera $\frac{-\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx}{x^{\frac{2m}{n}}} = -\frac{m}{n}x^{-\frac{m}{n}-1}dx$. Ce qui donne cette régle générale.

REGLE IV.

Pour les Puiſſances parfaites ou imparfaites.

La différence d'une puiſſance quelconque parfaite ou imparfaite d'une quantité variable, eſt égale au produit de l'expoſant de cette puiſſance, par cette même quantité élevée à une puiſſance moindre d'une unité, & multipliée par ſa différence.

Ainſi ſi l'on ſuppoſe que m exprime tel nombre entier ou rompu que l'on voudra, ſoit poſitif, ſoit négatif, & x une quantité variable quelconque, la différence de x^m ſera toujours $mx^{m-1}dx$.

EXEMPLES.

La différence du cube de $ay-xx$, c'eſt-à-dire de $\overline{ay-xx}^3$, eſt $3 \times \overline{ay-xx}^2 \times ady - 2xdx$ $= 3a^3yydy - 6aaxxydy + 3ax^4dy - 6aayyxdx + 12ayx^3dx - 6x^5dx$.

La différence de $\sqrt{xy+yy}$ ou de $\overline{xy+yy}^{\frac{1}{2}}$, est $\frac{1}{2}\times\overline{xy+yy}^{-\frac{1}{2}}\times\overline{ydx+xdy+2ydy}$, ou $\frac{ydx+xdy+2ydy}{2\sqrt{xy+yy}}$.

Celle de $\sqrt{a^4+axyy}$ ou de $\overline{a^4+axyy}^{\frac{1}{2}}$, est $\frac{1}{2}\times\overline{a^4+axyy}^{-\frac{1}{2}}\times\overline{ayydx+2axydy}$, ou $\frac{ayydx+2axydy}{2\sqrt{a^4+axyy}}$.

Celle de $\sqrt[3]{ax+xx}$, ou de $\overline{ax+xx}^{\frac{1}{3}}$, est $\frac{1}{3}\times\overline{ax+xx}^{-\frac{2}{3}}\times\overline{adx+2xdx}$, ou $\frac{adx+2xdx}{3\sqrt[3]{\overline{ax+xx}^{2}}}$.

La différence de $\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}$ ou de $\overline{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}^{\frac{1}{2}}$, est $\frac{1}{2}\times\overline{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}^{-\frac{1}{2}}\times\overline{adx+2xdx+\frac{ayydx+axydy}{2\sqrt{a^4+axyy}}}$, ou $\frac{adx+2xdx}{2\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}}+\frac{ayydx+2axydy}{2\sqrt{a^4+axyy}\times 2\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}}$.

La différence de $\frac{\sqrt[3]{ax+xx}}{\sqrt{xy+yy}}$ sera selon cette régle (*Art.* 7. 6.) & celle des fractions . . . . . .

$$\frac{\frac{adx+2xdx}{3\sqrt[3]{\overline{ax+xx}^{2}}}\times\sqrt{xy+yy}\;\frac{-ydx-xdy-2ydy}{2\sqrt{xy+yy}}\times\sqrt[3]{ax+xx}}{xy+yy}.$$

(*Consultez la note quatrieme.*)

REMARQUE.

8. Il est à propos de bien remarquer que l'on a toujours supposé en prenant les différences, qu'une des variables x croissant, les autres y, z, &c. croissoient aussi ; c'est-à-dire que les x deve-

nant $x+dx$, les y, z, &c. devenoient $y+dy$, $z+dz$, &c. C'eſt pourquoi s'il arrive que quelques-unes diminuent pendant que les autres croiſſent, il en faudra regarder les différences comme des quantités négatives par rapport à celles des autres qu'on ſuppoſe croître ; & changer par conſéquent les ſignes des termes où les différences de celles qui diminuent ſe rencontrent. Ainſi ſi l'on ſuppoſe que les x croiſſant, les y & les z diminuent, c'eſt-à-dire que les x devenant $x+dx$, les y & les z deviennent $y-dy$ & $z-dz$, & que l'on veuille prendre la différence du produit xyz ; il faudra changer dans la différence $xydz+xzdy+yzdx$ trouvée (*Art.* 5.), les ſignes des termes où dy & dz ſe rencontrent : ce qui donne $yzdx-xydz-xzdy$ pour la différence cherchée.



SECTION II.

Usage du calcul des différences pour trouver les Tangentes de toutes sortes de lignes courbes.

DÉFINITION.

SI l'on prolonge un des petits côtés M*m* (*Fig.* 2. *Pl.* 1.) du poligone qui compose (*Art.* 3.) une ligne courbe ; ce petit côté ainsi prolongé sera appellé la *Tangente* de la courbe au point M ou *m*. (*Consultez la Note cinquieme.*)

PROPOSITION I.

PROBLÉME.

9. SOIT *une ligne courbe* AM (*Fig.* 3. *Pl.* 1.) *telle que la relation de la coupée* AP *à l'appliquée* PM, *soit exprimée par une équation quelconque, & qu'il faille du point donné* M *sur cette courbe mener la tangente* MT.

Ayant mené l'appliquée MP, & supposé que la droite MT qui rencontre le diamètre au point T, soit la tangente cherchée ; on concevra une autre appliquée *mp* infiniment proche de la premiere, avec une petite droite MR parallele à AP. Et en nommant les données AP, x ; PM, y ; (donc P*p* ou MR $= dx$, & R*m* $= dy$.) les triangles semblables *m*RM & MPT donneront *m*R (dy). RM (dx) : : MP (y). PT $= \frac{ydx}{dy}$. Or par le moyen de la différence de l'équation donnée, on trouvera une valeur de dx en termes

qui seront tous affectés par dy, laquelle étant multipliée par y & divisée par dy, donnera une valeur de la soutangente PT en termes entierement connus & délivrés des différences, laquelle servira à mener la tangente cherchée MT. (*Consultez la Note sixieme.*)

REMARQUE.

10. LORSQUE le point T (*Fig.* 4. *Pl.* 1.) tombe du côté opposé au point A origine des x, il est clair que x croissant, y diminue, & qu'il faut changer par conséquent (*Art.* 8.) dans la différence de l'équation donnée les signes de tous les termes où dy se rencontre : autrement la valeur de dx en dy seroit négative ; & partant aussi celle de PT ($\frac{ydx}{dy}$). Il est mieux cependant, pour ne se point embarrasser, de prendre toujours la différence de l'équation donnée par les regles que l'on a prescrites (*Sect.* 1.) sans y rien changer ; car s'il arrive à la fin de l'opération que la valeur PT soit positive, il s'ensuivra qu'il faudra prendre le point T du même côté que le point A origine de x, comme l'on a supposé en faisant le calcul : & au contraire si elle est négative, il le faudra prendre du côté opposé. Ceci s'éclaircira par les exemples suivans.

EXEMPLE I.

11. 1°. SI l'on veut que $ax = yy$ exprime la relation de AP à PM, (*Fig.* 3. *Pl.* 1.) la courbe AM sera une parabole qui aura pour paramétre la droite donnée a, & l'on aura en pre-

nant de part & d'autre les différences, $adx = 2ydy$, & $dx = \frac{2ydy}{a}$ & PT $(\frac{ydx}{dy}) = \frac{2yy}{a} = 2x$ en mettant pour yy ſa valeur ax. D'où il ſuit que ſi l'on prend PT double de AP, & qu'on méne la droite MT, elle ſera tangente au point M. Ce qui étoit propoſé.

2°. Soit l'équation $aa = xy$ qui exprime la nature de l'hyperbole entre les aſymptotes. (*Fig.* 4. *Pl.* 1.) On aura en prenant les différences $xdy + ydx = o$, & partant PT $(\frac{ydx}{dy}) = -x$. D'où il ſuit que ſi l'on prend PT = PA du côté oppoſé au point A, & qu'on méne la droite MT, elle ſera la tangente en M.

3°. Soit l'équation générale $y^m = x$ qui exprime la nature de toutes les paraboles à l'infini, lorſque l'expoſant m marque un nombre poſitif entier ou rompu, & de toutes les hyperboles lorſqu'il marque un nombre négatif. On aura en prenant les différences $my^{m-1}dy = dx$, & partant PT $(\frac{ydx}{dy}) = my^m = mx$ en mettant pour y^m ſa valeur x.

Si $m = \frac{3}{2}$, l'équation ſera $y^3 = axx$ qui exprime la nature d'une des paraboles cubiques, & la ſoutangente PT $= \frac{3}{2}x$. Si $m = -2$, l'équation ſera $a^3 = xyy$ qui exprime la nature de l'une des hyperboles cubiques, & la ſoutangente PT $= -2x$. Il en eſt ainſi des autres.

Pour mener dans les paraboles la tangente au point A origine des x, il faut chercher quelle doit être la raiſon de dx à dy en ce point; car il eſt viſible que cette raiſon étant connue, l'angle

gle que la tangente fait avec l'axe ou le diamètre sera aussi déterminé. On a dans cet exemple $dx . dy :: my^{m-1} . 1$. D'où l'on voit que y étant zero en A, la raison de dy à dx doit y être infiniment grande lorsque m surpasse 1, & infiniment petite lorsqu'elle est moindre : c'est-à-dire que la tangente en A doit être parallele aux appliquées dans le premier cas, & se confondre avec le diamètre dans le second. (*Consultez la Note septieme.*)

EXEMPLE II.

12. SOIT une ligne courbe AMB (*Fig.* 5. *Pl.* 1.) telle que $AP \times PB$ ($x \times \overline{a-x}$). $\overline{PM}^2$ (yy) : : AB (a). AD (b). Donc $\frac{ayy}{b} = ax - xx$, & en prenant les différences, $\frac{2aydy}{b} = adx - 2xdx$, d'où l'on tire PT ($\frac{ydx}{dy}$) $= \frac{2ayy}{ab - 2bx} = \frac{2ax - 2xx}{a - 2x}$, en mettant pour $\frac{ayy}{b}$ sa valeur $ax - xx$; & PT $-$ AP ou AT $= \frac{ax}{a - 2x}$. (*Voyez la note* 8.)

Supposant à présent que $\overline{AP}^3 \times \overline{PB}^2$ ($x^3 \times \overline{a-x}^2$). $\overline{PM}^5$ (y^5) : : AB (a). AD (b), on aura $\frac{ay^5}{b} = x^3 \times \overline{a-x}^2$; & en prenant les différences $\frac{5ay^4dy}{b} = 3xxdx \times \overline{a-x}^2 - \overline{2adx + 2xdx} \times x^3$, d'où l'on tire $\frac{ydx}{dy} = \frac{5x^3 \times \overline{a-x}^2}{3xx \times \overline{a-x}^2 - \overline{2a+2x} \times x^3} = \frac{5x \times \overline{a-x}}{3a - 3x - 2x}$

ou $\frac{5ax - 5xx}{3a - 5x}$ & AT $= \frac{2ax}{3a - 5x}$. (*Voyez la Note* 8.)

Et généralement ſi l'on veut que *m* marque l'expoſant de la puiſſance de AP, & *n* celui de la puiſſance de PB, on aura $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times \overline{a - x}^n$ qui eſt une équation générale pour toutes les ellipſes à l'infini, dont la différence eſt $\frac{\overline{m+n}ay^{m+n-1}dy}{b} = mx^{m-1}dx \times \overline{a-x}^n - \overline{na-x}^{n-1}dx \times x^m$, d'où l'on tire (en mettant pour $\frac{ay^{m+n}}{b}$ ſa valeur $x^m \times \overline{a-x}^n$) PT $\left(\frac{ydx}{dy}\right)$ $= \frac{\overline{m+nx}^m \times \overline{a-x}^n}{mx^{m-1} \times \overline{a-x}^n - \overline{na-x}^{n-1} \times x^m} = \frac{\overline{m+nx} \times \overline{a-x}}{\overline{ma - x - nx}}$, ou PT $= \frac{\overline{m+n} \times \overline{ax - xx}}{\overline{ma - m - nx}}$, & AT $= \frac{nax}{\overline{ma - m - nx}}$. (*Voyez la Note* 8.)

EXEMPLE III.

13. LES mêmes choſes étant poſées que dans l'exemple précédent, excepté que l'on ſuppoſe ici que le point B (*Fig.* 6. *Pl.* 1.) tombe de l'autre côté du point A par rapport au point P, on aura l'équation $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times \overline{a+x}^n$ qui exprime la nature de toutes les hyperboles conſidérées par rapport à leurs diamètres. D'où l'on tirera comme ci-deſſus PT $= \frac{\overline{m+n} \times \overline{ax+xx}}{\overline{ma + m + nx}}$ & AT $\frac{nax}{\overline{ma + m + nx}}$. (*Voyez la Note* 9. *num.* 1.)

Maintenant ſi l'on ſuppoſe que A P ſoit infiniment grande, la tangente TM ne rencontrera la courbe qu'à une diſtance infinie, c'eſt-à-dire, qu'elle en deviendra l'aſymptote CE; & l'on aura en ce cas AT $\left(\frac{nax}{ma + \overline{m + nx}}\right) = \frac{n}{m + n} a$ $=$ AC; puiſque a étant infiniment moindre que x, le terme ma ſera nul par rapport à $\overline{m + nx}$. Par la même raiſon en ce cas l'équation à la courbe deviendra $ay^{m+n} = bx^{m+n}$. Ainſi en faiſant, pour abréger, $m + n = p$, & en extrayant de part & d'autre la racine p, on aura $y\sqrt[p]{a} = x\sqrt[p]{b}$, dont la différence eſt $dy\sqrt[p]{a} = dx\sqrt[p]{b}$: de ſorte qu'en menant AE parallele aux appliquées, & en concevant un petit triangle au point où l'aſymptote CE rencontre la courbe, on formera cette proportion $dx \,.\, dy$, ou $\sqrt[p]{a} \,.\, \sqrt[p]{b}$: : AC . ($\frac{n}{p}a$). AE $= \frac{n}{p}\sqrt[p]{ba^{p-1}}$. Or les valeurs de CA & AE étant ainſi déterminées, on menera la droite indéfinie CE qui ſera l'aſymptote cherchée.

Si $m = 1$ & $n = 1$, la courbe ſera l'hyperbole ordinaire, & on aura AC $= \frac{1}{2}a$, & AE $= \frac{1}{2}\sqrt{ab}$, c'eſt-à-dire à la moitié du diamètre conjugué, ce que l'on ſçait d'ailleurs être conforme à la vérité. (*Voyez la Note 9. num. 2. & ſuivants.*)

EXEMPLE IV.

14. SOIT l'équation $y^3 - x^3 = axy$ (AP $= x$, PM $= y$, a eſt une ligne droite donnée) & que

cette équation exprime la nature de la courbe AM, (*Fig.* 6. *Pl.* 1.) sa différence sera $3yydy - 3xxdx = axdy + aydx$. Donc $\frac{ydx}{dy} = \frac{3y^3 - axy}{3xx + ay}$, & AT $(\frac{ydx}{dy} - x) = \frac{3y^3 - 3x^3 - 2axy}{3xx + ay} = \frac{axy}{3xx + ay}$ en mettant pour $3y^3 - 3x^3$ sa valeur $3axy$. (*Voyez la Note* 10. *quest.* 1. 2.)

Maintenant si l'on suppose que AP & PM soient chacune infiniment grande, la tangente TM deviendra l'asymptote CE, & les droites AT, AS deviendront AC, AE qui déterminent la position de l'asymptote. Or AT que j'appelle $t = \frac{axy}{3xx + ay}$, d'où l'on tire $y = \frac{3txx}{ax - at}$ $= \frac{3tx}{a}$ lorsque AT devient AC, parce qu'alors at est nulle par rapport à ax. Mettant donc cette valeur $\frac{3tx}{a}$ à la place de y dans $y^3 - x^3 = axy$, on aura $27t^3x^3 - a^3x^3 = 3a^3txx$, d'où l'on tire (en effaçant le terme $3a^3txx$, parce que x étant infinie, il est nul par rapport aux deux autres $27t^3x^3$ & a^3x^3) AC $(t) = \frac{1}{3}a$. De même AS $(y - \frac{xdy}{dx})$ que j'appelle $s = \frac{axy}{3yy - ax}$, d'où l'on tire $x = \frac{3syy}{ay + as} = \frac{3sy}{a}$, parce que y étant infinie par rapport à s, le terme as sera nul par rapport au terme ay; & en mettant cette valeur dans l'équation à la courbe, on trouvera AE $(s) = \frac{1}{3}a$. D'où il suit que si

l'on prend les lignes AC, AE égales chacune à $\frac{1}{3}a$, & qu'on mene la droite indéfinie CE, elle sera l'asymptote de la courbe AM. (*Consultez la Note dixieme, quest. 3. & suiv.*).

On se réglera sur ces deux derniers exemples pour trouver les asymptotes des autres lignes courbes.

PROPOSITION II.

PROBLÉME.

15. S*i l'on suppose dans la proposition précédente que les coupées* AP (Fig. 7. Pl. 1.) *soient des portions d'une ligne courbe dont l'on sçache mener les tangentes* PT, *& qu'il faille du point donné* M *sur la courbe* AM *mener la tangente* MT.

Ayant mené l'appliquée MP avec la tangente PT, & supposé que la droite MT qui la rencontre en T, soit la tangente cherchée ; on imaginera une autre appliquée mp infiniment proche de la premiere, & une petite droite MR parallele à PT : & en nommant les données AP, x; PM, y; on aura comme auparavant Pp ou MR $= dx$, R$m = dy$, & les triangles semblables mRM & MPT donneront mR (dy). RM (dx) :: MP (y). PT $= \frac{ydx}{dy}$. On achevera ensuite le reste par le moyen de l'équation qui exprime la relation des coupées AP (x) aux appliquées PM (y), comme l'on a vû dans les exemples qui précédent, & comme l'on verra encore dans ceux qui suivent. (*Consultez la Note* 11.)

EXEMPLE I.

16. SOIT $\frac{yy}{x} = \frac{x\sqrt{aa+yy}}{a}$, dont la différence est $\frac{2xydy - yydx}{xx} = \frac{dx\sqrt{aa+yy}}{a} + \frac{xydy}{a\sqrt{aa+yy}}$: on aura en réduisant cette égalité à une proportion dy. dx (MP.PT) : : $\frac{\sqrt{aa+yy}}{a} + \frac{yy}{xx}$. $\frac{2xy}{xx} - \frac{xy}{a\sqrt{aa+yy}}$. Et partant le rapport de la donnée MP à la soutangente cherchée PT, sera exprimé en termes entièrement connus & délivrés des différences. Ce qui étoit proposé.

EXEMPLE II.

17. SOIT $x = \frac{ay}{b}$, dont la différence est $dx = \frac{ady}{b}$: on aura PT $(\frac{ydx}{dy}) = \frac{ay}{b} = x$. Si l'on suppose que la ligne courbe APB soit un demi-cercle, & que les appliquées MP, étant prolongées en Q, soient perpendiculaires sur le diamètre AB; la courbe AMC sera une demi-roulette ou cycloïde : simple lorsque $b = a$; allongée, lorsqu'elle est plus grande; & accourcie, lorsqu'elle est moindre. (*Consultez la Note* 12.)

COROLLAIRE.

18. SI la roulette étant simple, l'on méne la corde AP; je dis qu'elle sera parallele à la tangente MT. Car le triangle MPT étant alors isoscele, l'angle externe TPQ sera double de

l'interne opposé TMQ. Or l'angle APQ est égal à l'angle APT, puisque l'un & l'autre a pour mesure la moitié de l'arc AP ; & partant il est la moitié de l'angle TPQ. Les angles TMQ, APQ seront donc égaux entr'eux ; & par conséquent les lignes MT, AP seront paralleles. (*Consultez la Note douzieme.*)

PROPOSITION III.

PROBLÉME.

19. SOIT *une ligne courbe quelconque* AP *qui ait* (Fig. 7. Pl. 1.) *pour diamètre la droite* KNAQ, *& dont l'on sçache mener les tangentes* PK; *soit de plus une autre courbe* AM, *telle que menant, comme on voudra, l'appliquée* MQ *qui coupe la premiere courbe au point* P, *la relation de l'arc* AP *à l'appliquée* MQ *soit exprimée par une équation quelconque. Il faut d'un point donné* M *mener la tangente* MN.

Ayant nommé les connues PK, t; KQ, s; l'arc AP, x; MQ, y; l'on aura (en concevant une autre appliquée mq infiniment proche de MQ, & en tirant PO, MS paralleles à AQ) $Pp = dx$, $mS = dy$; & à cause des triangles semblables KPQ & PpO, mSM & MQN, l'on aura PK (t). KQ (s) : : Pp (dx). PO ou MS $= \frac{sdx}{t}$. Et mS (dy). SM ($\frac{sdx}{t}$) : : MQ (y). QN $= \frac{sydx}{tdy}$. Or par le moyen de la différence de l'équation donnée, on trouvera une valeur de

dx en termes qui ſeront tous affectés par dy ; & partant ſi l'on ſubſtitue cette valeur à la place de dx dans $\frac{sydx}{tdy}$, les dy ſe détruiront, & la valeur de la ſoutangente cherchée QN ſera exprimée en termes tous connus. Ce qu'il falloit trouver.

PROPOSITION IV.

Probléme.

20. Soient *deux lignes courbes* AQC, BCN (*Fig.* 8. *Pl.* 1.) *qui ayent pour diamétre la droite* TEABF, *& dont l'on ſçache mener les tangentes* QE, NF; *ſoit de plus une autre ligne courbe* MC *telle que la relation des appliquées* MP, QP, NP, *ſoit exprimée par une équation quelconque. Il faut d'un point donné* M *ſur cette derniere courbe lui mener la tangente* MT.

Ayant imaginé aux points Q, M, N, les petits triangles Qoq, MRm, NSn, & nommé les connues PE, s; PF, t; PQ, x; PM, y; PN, z; l'on aura $oq = dx$, $Rm = dy$, $Sn = -dz$, (*Art.* 8.) parce que x & y croiſſant, z diminue. Et à cauſe des triangles ſemblables QPE & qoQ, NPF & nSN, MPT & mRM; l'on aura QP (x). PE (s) :: qo (dx). oQ ou MR ou SN $= \frac{sdx}{x}$. Et NP (z). PF (t) :: nS $(-dz)$. SN $= \frac{-tdz}{z} = \frac{sdx}{x}$ (d'où l'on tire $dz = \frac{-szdx}{tx}$). Et mR (dy). RM

$(\frac{sdx}{x})$: : MP (y) . PT $= \frac{sydx}{xdy}$. Or ſi l'on met dans la différence de l'équation donnée, à la place de dz, ſa valeur $-\frac{szdx}{tx}$, on trouvera une valeur de dx en dy, laquelle étant ſubſtituée dans $\frac{sydx}{xdy}$, les dy ſe détruiront, & la valeur de la ſoutangente PT ſera exprimée en termes tous connus.

EXEMPLE.

21. SOIT $yy = xz$, dont la différence eſt $2ydy = zdx + xdz = \frac{tzdx - szdx}{t}$, en mettant pour dz ſa valeur négative $-\frac{szdx}{tx}$, d'où l'on tire $dx = \frac{2tydy}{tz - sz}$; & partant PT, $(\frac{sydx}{xdy}) = \frac{2styy}{txz - sxz} = \frac{2st}{t - s}$, en mettant pour yy ſa valeur xz.

Soit maintenant l'équation générale $y^{m+n} = x^m z^n$, dont la différence eſt $\overline{m+n}\,y^{m+n-1}dy = mz^n x^{m-1}dx + nx^m z^{n-1}dz = \frac{mtz^n x^{m-1}dx - nsz^n x^{m-1}dx}{t}$, en mettant pour dz ſa valeur $\frac{-szdx}{tx}$, d'où l'on tire PT $(\frac{sydx}{xdy}) = \frac{\overline{mst + nst}\,y^{m+n}}{mtz^n x^m - nsz^n x^m} = \frac{mst + nst}{mt - ns}$, en mettant pour y^{m+n} ſa valeur $x^m z^n$.

On peut remarquer que ſi les courbes AQC, BCN devenoient des lignes droites, la courbe MC ſeroit alors une des Sections coniques à l'in-

fini ; ſçavoir une Ellipſe lorſque l'appliquée CD, qui part du point de rencontre C, tombe entre les extrêmités A, B ; une Hyperbole, lorſqu'elle tombe de part ou d'autre ; & enfin une Parabole, lorſque l'une des extrêmités A ou B eſt infiniment éloignée de l'autre, c'eſt-à-dire, lorſqu'une des lignes droites CA ou CB eſt parallele au diamétre AB. (*Conſultez la Note treizieme.*)

PROPOSITION V.

Probléme.

22. Soit *une ligne courbe* APB (*Fig.* 9. *Pl.* 1.) *qui ait un commencement fixe & invariable au point* A, *& dont l'on ſçache mener les tangentes* PH ; *ſoit hors de cette ligne un autre point fixe* F, *& une autre ligne courbe* CMD *telle qu'ayant mené la droite quelconque* FMP, *la relation de ſa partie* FM *à la portion de courbe* AP *ſoit exprimée par telle équation qu'on voudra. On propoſe de mener du point donné* M *la tangente* MT.

Ayant mené ſur FP la perpendiculaire FH qui rencontre la tangente donnée PH au point H, & la cherchée MT au point T ; imaginé une droite FR*m*O*p* qui faſſe avec FP un angle infiniment petit ; & décrit du centre F les petits arcs de cercle PO, MR ; le petit triangle *p*OP ſera ſemblable au triangle rectangle PFH ; car les angles HPF, H*p*F ſont (*Art.* 2.) égaux, puiſqu'ils ne différent entr'eux que de l'angle PF*p* que l'on ſuppoſe infiniment petit ; & de plus l'angle *p*OP eſt droit, puiſque la tangente en O

(qui n'eſt autre choſe que la continuation du petit arc PO conſidéré comme une droite) eſt perpendiculaire ſur le rayon FO. Par la même raiſon les triangles mRM, MFT ſeront ſemblables. Or il eſt clair que les petits triangles ou ſecteurs FPO & FMR ſont ſemblables. Si donc l'on nomme les connues PH, t; HF, s; FM, y; FP, z; & l'arc AP, x; on aura PH (t). HF (s) :: Pp (dx). PO $= \frac{sdx}{t}$. Et FP (z). FM (y) :: PO $(\frac{sdx}{t})$. MR $= \frac{ysdx}{tz}$. Et mR (dy). RM $(\frac{sydx}{tz})$ :: FM (y). FT $= \frac{syydx}{tzdy}$. Et on achevera le reſte par le moyen de la différence de l'équation donnée. (*Conſultez la Note quatorzieme.*)

EXEMPLE.

23. SI l'on veut que la courbe APB (*Fig.* 10. *Pl.* 1.) ſoit un cercle qui ait pour centre le point fixe F; il eſt clair que la tangente PH devient parallele & égale à la ſoutangente FH, à cauſe que HP ſera auſſi perpendiculaire à PF; & qu'ainſi l'on aura en ce cas FT $= \frac{yydx}{zdy} = \frac{yydx}{ady}$, en nommant la droite FP (z), a; parce qu'elle devient conſtante de variable qu'elle étoit auparavant. Cela poſé, ſi l'on nomme la circonférence entiere, ou une de ſes portions déterminées b; & que l'on faſſe $b \,.\, x :: a \,.\, y$; la courbe CMD, qui eſt en ce cas FMD, ſera la Spirale d'*Archimede*, & l'on aura $y = \frac{ax}{b}$ qui a pour ſa

différence $dy = \frac{adx}{b}$, d'où l'on tire $ydx = \frac{bydy}{a}$ $= xdy$ en mettant pour y sa valeur $\frac{ax}{b}$; & partant FT $(\frac{yydx}{ady}) = \frac{xy}{a}$. Ce qui donne cette construction.

Soit décrit du centre F & du rayon F M, l'arc de cercle M Q, terminé en Q par le rayon F A qui joint les points fixes A, F ; soit pris FT égale à l'arc MQ : je dis que la droite MT sera tangente en M. Car à cause des secteurs semblables F P A, F M Q, l'on aura F P (a). F M (y) : : AP (x). MQ $= \frac{yx}{a} =$ F T.

Si l'on fait en général $b . x : : a^m . y^m$, (l'exposant m désigne un nombre entier ou rompu tel que l'on veut) la courbe FMD sera une des spirales à l'infini, & l'on aura $y^m = \frac{a^m x}{b}$, qui a pour sa différence $my^{m-1}dy = \frac{a^m dx}{b}$, d'où l'on tire ydx $= \frac{mby^m dy}{a^m} = mxdy$, en mettant pour y^m sa valeur $\frac{a^m x}{b}$; & partant F T $(\frac{yydx}{ady}) = \frac{mxy}{a} = m \times$ M Q.

PROPOSITION VI.

Problême.

24. Soit *une ligne courbe* APB (*Fig.* 11. *Pl.* 1.) *dont l'on sçache mener les tangentes* PH, *& un point fixe* F *hors de cette ligne ; soit une autre*

ligne courbe CMD *telle que menant comme on voudra, la droite* FPM, *la relation de* FP *à* FM *ſoit exprimée par une équation quelconque. Il faut du point donné* M *mener la tangente* MT.

Ayant mené la droite FHT perpendiculaire ſur FM, & imaginé comme dans la propoſition précédente les petits triangles POp, MRm ſemblables aux triangles HFP, TFM, on nommera les connues FH, s; FP, x; FM, y; & l'on aura PF (x). FH (s) :: pO (dx). OP $= \frac{sdx}{x}$. Et FP (x). FM (y) :: OP ($\frac{sdx}{x}$). RM $= \frac{sydx}{xx}$. Et mR (dy). RM ($\frac{sydx}{xx}$) :: FM (y). FT $= \frac{syydx}{xxdy}$. On achevera enſuite le reſte par le moyen de la différence de l'équation donnée. (*Conſultez la Note quinzieme.*)

EXEMPLE.

25. Si l'on veut que la courbe APB ſoit une ligne droite PH, & que l'équation qui exprime la relation de FP à FM ſoit $y - x = a$, c'eſt-à-dire, que PM ſoit toujours égale à la même droite donnée a; l'on aura pour différence $dy = dx$; & partant FT ($\frac{syydx}{xxdy}$) $= \frac{syy}{xx}$. Ce qui donne cette conſtruction.

Soit menée ME parallele à PH, & MT parallele à PE; je dis qu'elle ſera tangente en M.

Car FP (x). FH (s) :: FM (y). FE $= \frac{sy}{x}$. Et

FP (x) . FE ($\frac{sy}{x}$) : : FM (y) . FT $= \frac{syy}{xx}$. Il eſt clair que la courbe CMD eſt la Conchoïde de *Nicomede*, dont l'aſymptote eſt la droite PM, & le pole eſt le point fixe F.

PROPOSITION VII.

PROBLÉME.

26. SOIT *une ligne courbe* ARM (*Fig.* 12. *Pl.* 1.) *dont l'on ſçache mener les tangentes* MH, *& qui ait pour diamètre la droite* EPAHT; *ſoit hors de ce diamètre un point fixe* F, *d'où parte une ligne droite indéfinie* FPSM *qui coupe le diamètre en* P *& la courbe en* M. *Si l'on conçoit maintenant que la droite* FPM, *en tournant autour du point* F, *faſſe mouvoir le plan* PAM *toujours parallélement à ſoi-même le long de la ligne droite* ET *immobile & indéfinie, enſorte que la diſtance* PA *demeure par tout la même; il eſt clair que l'interſection continuelle* M *des lignes* FM, AM *décrira dans ce mouvement une ligne courbe* CMD. *On propoſe de mener d'un point donné* M *ſur cette courbe la tangente* MT.

Ayant imaginé que le plan PAM ſoit parvenu dans la ſituation infiniment proche *pam*, & tiré la ligne *m*RS parallele à AP; il eſt clair par la génération que Pp = Aa = Rm; & partant que RS = Sm — Pp. Or nommant les connues FP ou Fp, x; FM ou Fm, y; PH, s; MH, t; & la différence Pp, dz; les triangles ſemblables FPp & FSm, MPH & MSR,

MHT & MRm, donneront Fp (x). Fm (y) :: Pp (dz). S$m = \frac{ydz}{x}$ (donc SR $= \frac{ydz - xdz}{x}$). Et PH (s). HM (t) :: SR ($\frac{ydz - xdz}{x}$). RM $= \frac{tydz - txdz}{sx}$. Et MR ($\frac{tydz - txdz}{sx}$). Rm (dz) :: MH (t). HT $= \frac{sx}{y - x}$. Donc si l'on mene FE parallele à MH, & qu'on prenne HT = PE ; la ligne MT sera la tangente cherchée.

Si la ligne AM étoit une ligne droite ; la courbe CMD seroit une Hyperbole qui auroit pour une de ses asymptotes la ligne ET. Et si elle étoit un cercle qui eût son centre au point P ; la courbe CMD seroit la Conchoïde de *Nicomede*, qui auroit pour asymptote la ligne ET, & pour pole le point F. Mais si elle étoit une parabole ; la courbe CMD seroit la compagne de la Paraboloïde de *Descartes* (*Geom. Liv.* 3.), qui se décriroit en même-tems audessous de la droite ET par l'intersection de FP avec l'autre moitié de la Parabole. (*Consultez la Note seizieme.*)

PROPOSITION VIII.

PROBLÉME.

27. SOIT *une ligne courbe* AN (*Fig.* 13. *Pl.* 1.) *qui ait pour diamètre la ligne droite* AP, *avec un point fixe* F *hors de ces lignes ; soit une autre ligne courbe* CMD *telle que menant comme l'on voudra, la droite* FMPN, *la relation de ses*

parties FN, FP, FM *soit exprimée par une équation quelconque. Il est question de tirer du point donné* M *la tangente* MT.

Soit menée par le point F la ligne HK perpendiculaire à FN, qui rencontre en K le diamètre AP, & en H la tangente donnée NH; soient décrits du centre F & des intervalles FN, FP, FM de petits arcs de cercle NQ, P*o*, MR terminés par la droite F*n* que l'on conçoit faire avec FN un angle infiniment petit. Cela posé.

Si l'on nomme les connues FK, s; FH, t; FP, x; FM, y; FN, z; les triangles semblables PFK & poP, FMR & FPo & FNQ, HFN & NQn, mRM & MFT donneront PF (x). FK (s) :: po (dx). oP $= \frac{sdx}{x}$. Et FP (x). FM (y) :: Po $(\frac{sdx}{x})$. MR $\frac{sydx}{xx}$. Et FP (x). FN (z) :: Po $(\frac{sdx}{x})$. NQ $= \frac{szdx}{xx}$. Et HF (t). FN (z) :: NQ $(\frac{szdx}{xx}$. Qn $(-dz) = \frac{szzdx}{txx}$. Et mR (dy). RM $(\frac{sydx}{xx})$ :: FM (y). FT $= \frac{syydx}{xxdy}$. Or par le moyen de la différence de l'équation donnée, on trouvera une valeur de dy en dx & dz, dans laquelle mettant à la place de dz sa valeur négative $\frac{-szzdx}{txx}$, parce que x croissant, z diminue; tous les termes seront

affectés

affectés par dx; de ſorte que cette valeur étant enfin ſubſtituée dans $\frac{syydx}{xxdy}$, les dx ſe détruiront. Et partant la valeur de FT ſera exprimée en termes connus & délivrés des différences.

Si l'on ſuppoſoit que la ligne droite AP fut une ligne courbe, & qu'on menât la tangente PK, on trouveroit toujours pour FT la même valeur, & le raiſonnement demeureroit le même. (*Conſultez la Note dix-ſeptieme.*)

Exemple.

28. Supposons que la ligne courbe AN (*Fig.* 14. *Pl.* 1.) ſoit un cercle qui paſſe par le point F (tellement ſitué à l'égard du diamétre AP que la ligne FB perpendiculaire à ce diamétre paſſe par le centre G de ce cercle), & que PM ſoit toujours égale à PN; il eſt clair que la courbe CMD, qui devient en ce cas FMA, ſera la Ciſſoïde de *Diocles*, & que l'on aura pour équation $z+y=2x$, dont la différence eſt $dy = 2dx - dz = \frac{2txxdx + szzdx}{txx}$ en mettant pour dz ſa valeur $-\frac{szzdx}{txx}$ trouvée ci-deſſus (*Art.* 27.). Et partant FT $\left(\frac{syydx}{xxdy}\right) = \frac{styy}{2txx + szz}$.

Si le point donné M tomboit ſur le point A, les lignes FM, FN, FP ſeroient égales chacune à FA, comme auſſi les droites FK, FH;

& partant on auroit en ce cas FT $= \frac{x^4}{3x^3} = \frac{1}{3}x$, c'eſt-à-dire que ſi l'on prend FT $= \frac{1}{3}$ AF, & qu'on mene la ligne AT, elle ſera tangente en A.

On peut encore trouver les tangentes de la Ciſſoïde par le moyen de la premiere Propoſition, en menant les perpendiculaires NE, ML ſur le diamétre FB, & cherchant l'équation qui exprime le rapport de la coupée FL à l'appliquée LM; ce qui ſe fait ainſi. Ayant nommé les connues FB, $2a$; FL ou BE, x; LM, y; les triangles ſemblables FEN, FLM, & la proprieté du cercle donneront FL (x) . LM (y) : : FE . EN : : EN $(\sqrt{2ax - xx})$. EB (x). D'où l'on tire $yy = \frac{x^3}{2a - x}$, dont la différence eſt $2ydy = \frac{6axxdx - 2x^3dx}{\overline{2a - x}^2}$. Et partant LO (*Art.* 9.) $\left(\frac{ydx}{dy}\right) = \frac{yy \times \overline{2a - x}^2}{3axx - x^3} = \frac{2ax - xx}{3a - x}$, en mettant pour yy ſa valeur $\frac{x^3}{2a - x}$.

PROPOSITION IX.

PROBLÉME.

29. SOIENT *deux lignes courbes* ANB, CPD, *& une ligne droite* FKT, (*Fig.* 15. *Pl.* 1.) *ſur leſquelles ſoient marqués des points fixes* A, C, F; *ſoit de plus une autre ligne courbe* EMG *telle qu'ayant mené par un de ſes points quelconques* M *la droite* FMN, *&* MP *parallele à* FK; *la rélation de l'arc* AN *à l'arc* CP *ſoit exprimée par*

une équation quelconque. Il faut d'un point donné M sur la courbe EG mener la tangente MT.

Ayant mené par le point cherché T la ligne TH parallele à FM, & par le point donné M les droites MRK, MOH paralleles aux tangentes en P & en N, on tirera $Fm\,O\,n$ infiniment proche de FMN, & $m\,R\,p$ parallele à MP.

Cela posé, si l'on nomme les connues FM, s; FN, t; MK, u; CP x; AN, y; (donc Pp ou $MR = dx$, $Nn = dy$) les triangles semblables FNn & FMO, MOm & MHT, MRm & MKT donneront FN (t). FM (s) : : Nn (dy). $MO = \frac{sdy}{t}$. Et MR (dx). MO $\left(\frac{sdy}{t}\right)$: : MK (u). $MH = \frac{sudy}{tdx}$. Or par le moyen de la différence de l'équation donnée l'on aura une valeur de dy en termes qui seront tous affectés par dx, laquelle étant substituée dans $\frac{sudy}{tdx}$, les dx se détruiront ; & partant la valeur de MH sera exprimée en termes entièrement connus. Ce qui donne cette construction.

Soit mené MH parallele à la touchante en N & égale à la valeur que l'on vient de trouver : soit tirée HT parallele à FM, qui rencontre en T la droite FK, par où & par le point donné M soit menée la tangente cherchée MT. (*Consultez la Note dix-huitieme.*)

EXEMPLE.

30. Si l'on veut que la courbe A N B (*Fig.* 16. *Pl.* 1.) soit un quart de cercle qui ait pour centre le point fixe F; que la courbe C P D soit le rayon A P F perpendiculaire sur la droite F K G Q T B, & que l'arc A N (y) soit toujours à la droite A P (x), comme le quart de cercle A N B (b) au rayon A F (a); la courbe E M G deviendra la quadratrice A M G de *Dinostrate*, & l'on aura M H $\left(\frac{sudy}{tdx}\right) = \frac{asdy - sxdy}{adx}$, puisque F P ou M K $(u) = a - x$, & F N $(t) = a$. Mais l'analogie supposée donne $ay = bx$, & $ady = bdx$. Mettant donc dans la valeur de M H à la place de x & de dy leurs valeurs $\frac{ay}{b}$ & $\frac{bdx}{a}$, on trouvera M H $= \frac{bs - ys}{a}$. Ce qui donne cette construction.

Soit menée M H perpendiculaire sur F M, & égale à l'arc M Q décrit du centre F, & soit tirée H T parallele à F M; je dis que la ligne M T sera tangente en M. Car à cause des secteurs semblables F N B, F M Q, l'on aura F N (a). F M (s) : : N B ($b - y$). M Q $= \frac{bs - sy}{a}$.

COROLLAIRE.

31. Si l'on veut déterminer le point G où la quadratrice A M G rencontre le rayon F B, (*Fig.* 17. *Pl.* 1.) on imaginera un autre rayon F g b infiniment proche de F G B; & en menant gf

parallele à F B, la propriété de la quadratrice & les triangles ſemblables F B*b*, *gf*F rectangles en B & en *f*, donneront A B . A F : : B *b* . F *f* : : F B ou A F . *gf* ou F G. D'où l'on voit que ſi l'on prend une troiſieme proportionnelle au quart de cercle A B & au rayon A F, elle ſera égale à FG, c'eſt-à-dire que $FG = \frac{aa}{b}$. Ce qui donne lieu d'abréger la conſtruction des tangentes.

Car menant TE parallele à MH, (*Fig.* 16. *Pl.* 1.) les triangles ſemblables F M K, F T E donneront M K ($a - x$) . M F (s) : : ET ou MH ($\frac{bs - sy}{a}$). $FT = \frac{bss - yss}{aa - ax} = \frac{bss}{aa}$. En mettant pour x ſa valeur $\frac{ay}{b}$, & diviſant enſuite le tout par $b - y$; d'où il eſt clair que la ligne F T eſt troiſieme proportionnelle à F G & à F M. (*Conſultez la Note dix-neuvieme.*)

PROPOSITION X.

PROBLÉME.

32. SOIT *une ligne courbe* AMB (*Fig.* 18. *Pl.* 2.) *telle qu'ayant mené d'un de ſes points quelconques* M *aux foyers* F, G, H, *&c. les droites* M F, M G, M H, *&c. leur relation ſoit exprimée par une équation quelconque : & ſoit propoſé de mener du point donné* M *la perpendiculaire* M P *ſur la tangente en ce point.*

Ayant pris ſur la courbe AB l'arc M*m* infiniment petit, & mené les droites FR*m*, G*m*S,

H*m*O, on décrira des centres F, G, H les petits arcs de cercles MR, MS, MO; ensuite du centre M & d'un intervalle quelconque on décrira de même le cercle CDE qui coupe les lignes MF, MG, MH aux points C, D, E, d'où l'on abaissera sur MP les perpendiculaires CL, DK, EI. Cette préparation étant faite, je remarque

1°. Que les triangles rectangles MR*m*, MLC sont semblables; car en ôtant des angles droits LM*m*, RMC l'angle commun LMR, les restes RM*m*, LMC seront égaux, & de plus ils sont rectangles en R & L. On prouvera de même que les triangles rectangles MS*m* & MKD, MO*m* & MIE sont semblables. Partant, puisque l'hypothenuse M*m* est commune aux petits triangles MR*m*, MS*m*, MO*m*, & que les hypothenuses MC, MD, ME des triangles MLC, MKD, MIE sont égales entr'elles; il s'ensuit que les perpendiculaires CL, DK, EI ont le même rapport entr'elles que les différences R*m*, S*m*, O*m*.

2°. Que les lignes, qui partent des foyers situés du même côté de la perpendiculaire MP, croissent pendant que les autres diminuent, ou au contraire. Comme dans la figure 18. FM croît de sa différence R*m*, pendant que les autres GM, HM diminuent de leurs S*m*, O*m*.

Si l'on suppose à présent, pour fixer ses idées, que l'équation qui exprime la relation des droites FM (x), GM (y), HM (z), soit $ax + xy - zz = 0$, dont la différence est $adx + ydx + xdy - 2zdz = 0$; Il est évident que la tangente en

M (qui n'eſt autre choſe que la continuation du petit côté Mm du poligone que l'on conçoit (*Art.* 3.) compoſer la courbe AMB) doit être tellement placée qu'en menant d'un de ſes points quelconques m des paralleles mR, mS, mO aux droites FM, GM, HM, terminées en R, S, O par des perpendiculaires MR, MS, MO à ces mêmes droites, on ait toujours l'équation $\overline{a+y} \times Rm + x \times Sm - 2z \times Om = o$: ou (ce qui revient au même, en mettant à la place de Rm, Sm, Om leurs proportionnelles CL, DK, EI) que la perpendiculaire MP à la courbe doit être placée, enſorte que $\overline{a+y} \times CL + x \times DK - 2z \times EI = o$. Ce qui donne cette conſtruction.

Que l'on conçoive que le point C (*Fig.* 18. 19. *Pl.* 2.) ſoit chargé du poids $a+y$ qui multiplie la différence dx de la droite FM ſur laquelle il eſt ſitué, & de même le point D du poids x, & le point E pris de l'autre côté de M par rapport au foyer H (parce que le terme $-2zdz$ eſt négatif) du poids $2z$. Je dis que la droite MP qui paſſe par le commun centre de peſanteur des poids ſuppoſés en C, D, E, ſera la perpendiculaire requiſe. Car il eſt clair par les principes de la Mécanique, que toute ligne droite, qui paſſe par le centre de peſanteur de pluſieurs poids, les ſépare, enſorte que les poids d'une part multipliés chacun par ſa diſtance de cette droite, ſont préciſément égaux aux poids de l'autre part multipliés auſſi chacun par ſa diſtance de cette même droite. Donc poſant le cas que x croiſ-

ſant, y & z croiſſent auſſi, c'eſt-à-dire, que les foyers F, G, H (*Fig.* 19. *Pl.* 2.) tombent du même côté de MP, comme l'on ſuppoſe toujours en prenant la différence de l'équation donnée ſelon les regles preſcrites ; il s'enſuit que la ligne MP laiſſera d'une part les poids en C & D, & de l'autre le poids en E, & qu'ainſi l'on aura $\overline{a+y}\times CL+x\times DK-2z\times EI=o$, qui étoit l'équation à conſtruire.

Or je dis maintenant que puiſque la conſtruction eſt bonne dans ce cas, elle le ſera auſſi dans tous les autres ; car ſuppoſant, par exemple, que le point M change de ſituation dans la courbe, enſorte que x croiſſant, y & z diminuent, c'eſt-à-dire, que les foyers G, H (*Fig.* 18. *Pl.* 2.) paſſent de l'autre côté de MP, il s'enſuit 1°. (*Art.* 8.) Qu'il faut changer dans la différence de l'équation donnée les ſignes des termes affectés par dy, dz, ou par leurs proportionnelles DK, EI ; de ſorte que l'équation à conſtruire ſera dans ce nouveau cas $\overline{a+y}\times CL-x\times DK+2z\times EI=o$. 2°. Que les poids en D & E changeront de côté par rapport à MP ; & qu'ainſi l'on aura par la propriété du centre de peſanteur $\overline{a+y}\times CL-x\times DK+2z\times EI=o$, qui eſt l'équation à conſtruire. Et comme cela arrive toujours dans tous les cas poſſibles, il s'enſuit, &c.

Il eſt évident que le même raiſonnement ſubſiſtera toujours, tel que ſoit le nombre des foyers, & telle que puiſſe être l'équation donnée ; de ſorte que l'on peut énoncer ainſi la conſtruction générale.

Soit priſe la différence de l'équation donnée dont je ſuppoſe que l'un des membres ſoit zero, & ſoit décrit à diſcrétion du centre M un cercle C D E qui coupe les droites MF, MG, MH aux points C, D, E, dans leſquels ſoient conçus des poids qui ayent entr'eux le même rapport que les quantités qui multiplient les différences des lignes ſur leſquelles ils ſont ſitués. Je dis que la ligne MP qui paſſe par leur commun centre de peſanteur, ſera la perpendiculaire requiſe. Il eſt à remarquer que ſi l'un des poids eſt négatif dans la différence de l'équation donnée, il le faut concevoir de l'autre côté du point M par rapport au foyer.

Si l'on veut que les foyers F, G, H (*Fig.* 20. *Pl.* 2.) ſoient des lignes droites ou courbes ſur qui les droites MF, MG, MH tombent à angles droits, la même conſtruction aura toujours lieu. Car menant du point *m* pris infiniment près de M les perpendiculaires *mf*, *mg*, *mh* ſur les foyers, & du point M les petites perpendiculaires MR, MS, MO ſur ces lignes ; il eſt clair que R*m* ſera la différence de MF, puiſque les droites MF, R*f* étant perpendiculaires entre les paralleles F*f*, MR, elles ſeront égales, & de même que S*m* eſt la différence de MG, & O*m* celle de MH ; & on prouvera enſuite tout le reſte comme ci-deſſus.

On peut encore concevoir que les foyers F, G, H (*Fig.* 21. *Pl.* 2.) ſoient tous ou en partie des lignes courbes qui ayent des commencemens fixes & invariables aux points F, G, H, & que la

ligne courbe AMB ſoit telle qu'ayant mené, par exemple, d'un de ſes points quelconques M les tangentes MV, MX & la droite MG; la relation des lignes mixtilignes FVM, HXM & de la droite GM ſoit exprimée par une équation quelconque. Car ayant mené du point m pris infiniment près de M la tangente mu, il eſt clair qu'elle rencontrera l'autre tangente au point V (puiſqu'elle n'eſt que la continuation du petit arc Vu conſidéré comme une petite droite); & partant que ſi l'on décrit du centre V le petit arc de cercle MR; Rm ſera la différence de la ligne mixtiligne FVM qui devient FVuRm. Et tout le reſte ſe démontrera comme ci-devant. (*Conſultez la Note* 20).

M. Tſchirnhaus *a donné la premiere idée de ce Problême dans ſon Livre de la Medecine de l'eſprit; M.* Fatio *en a trouvé enſuite une ſolution très-ingénieuſe qu'il a fait inſérer dans les Journaux d'Hollande : mais la maniere dont ils l'ont conçu, n'eſt qu'un cas particulier de la conſtruction générale que je viens de donner.*

EXEMPLE I.

33. SOIT $axx+byy+czz-f^3=o$ (les droites a, b, c, f ſont données) dont la différence eſt $axdx+bydy+czdz=o$. C'eſt pourquoi concevant en C (*Fig.* 22. *Pl.* 2.) le poids ax, en D le poids by, & en E le poids cz, c'eſt-à-dire, des poids qui ſoient entr'eux comme ces rectangles; la ligne MP qui paſſe par leur commun

centre de pesanteur, sera perpendiculaire à la courbe au point M.

Mais si l'on mene FO parallele à CL, & que l'on prenne le rayon MC pour l'unité, les triangles semblables MCL, MFO donneront FO $= x \times CL$; & de même menant GR parallele à DK, & HS parallele à EI, on trouvera que $GR = y \times DK$ & $HS = z \times EI$; de sorte qu'en imaginant aux foyers F, G, H les poids a, b, c; la ligne MP, qui passe par le centre de pesanteur des poids ax, by, cz supposés en C, D, E, passera aussi par le centre de pesanteur de ces nouveaux poids. Or ce centre est un point fixe, puisque les poids en F, G, H, sçavoir a, b, c, sont des droites constantes qui demeurent toujours les mêmes en quelque endroit que se trouve le point M. D'où il suit que la courbe AMB doit être telle que toutes ses perpendiculaires se coupent dans le même point, c'est-à-dire, qu'elle sera un cercle qui aura pour centre ce point. Voici donc une propriété très-remarquable du cercle que l'on peut énoncer ainsi.

S'il y a sur un même plan autant de poids a, b, c, &c. que l'on voudra, situés en F, G, H, &c. & que l'on décrive de leur commun centre de pesanteur un cercle AMB; je dis qu'ayant mené d'un de ses points quelconques M, les droites MF, MG, MH, &c. la somme de leurs quarrés multipliés chacun par le poids qui lui répond, sera toujours égale à une même quantité.

EXEMPLE II.

34. SOIT la courbe AMB (*Fig.* 23. *Pl.* 2.) telle qu'ayant mené d'un de ſes points quelconques M au foyer F qui eſt un point fixe, la droite MF, & au foyer G qui eſt une ligne droite la perpendiculaire MG; le rapport de MF à MG ſoit toujours le même, que de la donnée a à la donnée b.

Ayant nommé FM, x; MG, y; on aura $x . y :: a . b$, & partant $ay = bx$ dont la différence eſt $ady - bdx = o$. C'eſt pourquoi concevant en C pris au-delà de M par rapport à F le poids b, & en D (à pareille diſtance de M) le poids a, & menant par leur centre commun de peſanteur la ligne MP, elle ſera la perpendiculaire requiſe.

Il eſt clair par le principe de la balance, que ſi l'on diviſe la corde CD au point P, enſorte que CP . DP :: $a . b$; le point P, ſera le centre commun de peſanteur des poids ſuppoſés en C & D.

La courbe AMB eſt une ſection conique; ſçavoir une Parabole lorſque $a = b$, une Hyperbole lorſque a ſurpaſſe b, & enfin une Ellipſe lorſqu'il eſt moindre. (*Conſultez la Note* 21.)

EXEMPLE III.

35. SI après avoir attaché les extrêmités d'un fil FZVMGMXYH (*Fig.* 24. *Pl.* 2.) en F & en H, & avoir fiché une petite pointe en G, on fait tendre également ce fil par le moyen d'un

ſtile placé en M, enſorte que les parties FZV, HYX ſoient roulées autour des courbes qui ont leur origine en F & H, que la partie MG ſoit double, c'eſt-à-dire, qu'elle ſoit repliée en G, & que les choſes demeurant en cet état l'on faſſe mouvoir le ſtile M; il eſt clair qu'il décrira une courbe AMB. Il eſt queſtion de mener d'un point donné M ſur cette courbe la perpendiculaire MP, la poſition du fil qui ſert à la décrire étant donnée en ce point.

Je remarque que les parties droites MV, MX du fil ſont toujours tangentes en V & X, & que ſi l'on nomme les lignes mixtilignes FZVM, x; HYXM, z; la droite MG, y; & une ligne droite priſe égale à la longueur du fil, a; l'on aura toujours $x+2y+z=a$: d'où je connois que la courbe AMB eſt compriſe dans la conſtruction générale. C'eſt pourquoi prenant la différence $dx+2dy+dz=0$, & concevant en C le poids 1, en D le poids 2, & en E le poids 1; je dis que la ligne MP, qui paſſe par le centre commun de peſanteur de ces poids, ſera la perpendiculaire requiſe.

PROPOSITION XI.

PROBLEME.

36. SOIENT *deux lignes quelconques* APB, EQF (*Fig.* 25. *Pl.* 2.) *dont l'on ſçache mener les tangentes* PG, QH; *& ſoit une ligne droite* PQ *ſur laquelle ſoit marqué un point* M. *Si l'on conçoit que les extrêmités* P, Q *de cette droite*

glissent le long des lignes AB, EF, *il est clair que le point* M *décrira dans ce mouvement une ligne courbe* CD. *Il est question de mener d'un point donné* M *sur cette courbe la tangente* MT.

Ayant imaginé que la droite mobile PMQ soit parvenue dans la situation infiniment proche *pmq*, on tirera les petites droites PO, MR, QS perpendiculaires sur PQ, ce qui formera les petits triangles rectangles *p*OP, *m*RM, *q*SQ; & ayant pris PK égale à MQ, on menera la droite HKG perpendiculaire sur PQ, & l'on prolongera OP en T, où je suppose qu'elle rencontre la tangente cherchée MT. Cela posé, il est clair que les petites droites O*p*, R*m*, S*q* seront égales entr'elles, puisque par la construction PM & MQ sont par tout les mêmes.

Ayant nommé les connues PM ou KQ, *a*; MQ ou PK, *b*; KG, *f*; KH, *g*; & la petite droite O*p* ou R*m* ou S*q*, *dy*; les triangles semblables PKG & *p*OP, QKH & *q*SQ donneront PK (b). KG (f) :: *p*O (dy). OP $= \frac{fdy}{b}$. Et QK (a). KH (g) :: *q*S (dy). SQ $= \frac{gdy}{a}$. Or l'on sçait par la Géométrie commune que $MR = \frac{OP \times NQ + QS \times PM}{PQ} = \frac{fdy + gdy}{a+b}$. Ainsi les triangles semblables *m*RM, MPT donneront *m*R (dy). RM $\left(\frac{fdy+gdy}{a+b}\right)$ :: MP (a). PT $= \frac{af+ag}{a+b}$. Ce qu'il falloit trouver. (*Consultez la Note vingt-deuxieme.*)

PROPOSITION XII.

PROBLEME.

37. SOIENT *deux lignes quelconques* BN, FQ (*Fig.* 26. *Pl.* 2.) *qui ayent pour axes les droites* BC, ED *qui s'entre-coupent à angles droits au point* A; *& ſoit une ligne courbe* LM *telle qu'ayant mené d'un de ſes points quelconques* M *les droites* MGQ, MPN *parallele à* AB, AE; *la relation des eſpaces* EGQF (*le point* E *eſt un point fixe donné ſur la droite* AE, *& la ligne* EF *eſt parallele à* AC) APND, *& les droites* AP, PM, PN, GQ, *ſoit exprimée par une équation quelconque. Il eſt queſtion de mener d'un point donné* M *ſur la courbe* LM, *la tangente* MT.

Ayant nommé les données & variables AP ou GM, x; PM ou AG, y; PN, u; GQ, z; l'eſpace EGQF, s; l'eſpace APND, t; & les ſoutangentes données PH, a; GK, b; l'on aura Pp ou NS ou MR $= dx$, Gg ou Rm ou OQ $= -dy$; $Sn = -du = \frac{udx}{a}$, à cauſe des triangles ſemblables HPN, NSn; O$q = dz = -\frac{zdy}{b}$, NP$pn = dt = udx$, & QG$gq = ds = -zdy$; où l'on doit obſerver que les valeurs de Rm & Sn ſont négatives, parce que AP (x) croiſſant, PM (y) & PN (u) diminuent. Cela poſé, on prendra la différence de l'équation donnée, dans laquelle on mettra à la place de dt, ds, du, dz leurs valeurs udx, $-zdy$, $-\frac{udx}{a}$, $-\frac{zdy}{b}$; ce

qui donnera une nouvelle équation qui exprimera le rapport cherché de dy à dx, ou de MP à PT.

EXEMPLE I.

38. SOIT $s + zz = t + ux$, on aura en prenant les différences $ds + 2zdz = dt + udx + xdu$, & mettant à la place de ds, dt, dz, du leurs valeurs, on trouvera $- zdy - \frac{2zzdy}{b} = 2udx - \frac{uxdx}{a}$, d'où l'on tire PT $\left(\frac{ydx}{dy}\right) = \frac{2ayzz + aybz}{bux - 2abu}$.

EXEMPLE II.

39. SOIT $s = t$, donc $ds = dt$, c'est-à-dire, $- zdy = udx$, & partant PT $\left(\frac{ydx}{dy}\right) = - \frac{yz}{u}$. Or comme cette quantité est négative, il s'ensuit (*Art.* 10.) que l'on doit prendre le point T du côté opposé au point A origine des x. Si l'on suppose que la ligne FQ soit une hyperbole qui ait pour asymptotes les droites AC, AE, ensorte que GQ $(z) = \frac{cc}{y}$, & que la ligne BND soit une droite parallele à AB, de maniere que PN (u) soit par tout égale à la droite donnée c; il est clair que la courbe LM a pour asymptote la droite AB, & que sa soutangente PT $\left(- \frac{yz}{u}\right) = - c$: c'est-à-dire qu'elle demeure par tout la même.

La courbe LM est appellée dans ce cas *Logarithmique*. (*Consultez la Note vingt-troisieme.*)

PROPOSITION

PROPOSITION XIII.

PROBLÉME.

40. SOIENT *deux lignes quelconques* BN, FQ (*Fig.* 27. *Pl.* 2.) *qui ayent pour axe la même droite* BA, *sur laquelle soient marqués deux points fixes* A, E; *soit une troisieme ligne courbe* LM *telle qu'ayant mené par un de ses points quelconques* M *la droite* AN, *décrit du centre* A *l'arc de cercle* MG, *&* *tiré* GQ *parallele à* EF, *perpendiculaire sur* AB; *la relation des espaces* EGQF (s), ANB (t), *& des droites* AM *ou* AG (y), AN (z), GQ (u), *soit exprimée par une équation quelconque. Il faut mener d'un point donné* M *sur la courbe* LM *la tangente* MT.

Après avoir mené la droite ATH perpendiculaire sur AMN, soit imaginé une autre droite Amn infiniment proche de AMN, un autre arc mg, une autre perpendiculaire gq, & décrit du centre A le petit arc NS : on nommera les soutangentes données AH, a; GK, b; & on aura Rm ou G$g = dy$, S$n = dz$; les triangles semblables HAN & NSn, KGQ & QOq, donneront aussi SN $= \frac{adz}{z}$, O$q = -du = \frac{udy}{b}$, GQ$qg = -ds = udy$, ANn ou AN $\times \frac{1}{2}$ NS $= -dt = \frac{1}{2}adz$. On mettra toutes ces valeurs dans la différence de l'équation donnée, & l'on en formera une nouvelle, d'où l'on tirera

une valeur de dz en dy. Or à cause des secteurs & des triangles semblables ANS & AMR, mRM & MAT, on trouve AN(z). AM(y) : : NS ($\frac{adz}{z}$). MR $= \frac{aydz}{zz}$. Et mR (dy). RM ($\frac{aydz}{zz}$) : : AM(y). AT $= \frac{ayydz}{zzdy}$. Si donc l'on met dans cette formule à la place de dz sa valeur en dy, les différences se détruiront, & la valeur de la soutangente cherchée AT sera exprimée en termes entiérement connus. Ce qu'il falloit trouver.

EXEMPLE I.

41. SOIT $uy - s = zz - t$, dont la différence est $udy + ydu - ds = 2zdz - dt$, ce qui donne (après la substitution faite) $dz = \frac{4budy - 2uydy}{4bz + ab}$; & en mettant cette valeur dans $\frac{ayydz}{zzdy}$, on trouve AT $= \frac{4abuyy - 2auy^3}{4bz^3 + abzz}$.

EXEMPLE II.

42. SOIT $s = 2t$, donc $ds = 2dt$, c'est-à-dire, $-udy = -adz$, ou $dz = \frac{udy}{a}$; & partant AT ($\frac{ayydz}{zzdy}$) $= \frac{uyy}{zz}$.

Si la ligne BN est un cercle qui ait pour centre le point A, & pour rayon la droite AB $=$ AN $= c$, & que FQ soit une hyperbole, telle que GQ (u) $= \frac{ff}{y}$; il est clair que la courbe LM fait une

infinité de retours autour du centre A, avant que d'y parvenir (puisque lespace F E G Q devient infini, lorsque le point G tombe en A), & que A T $= \frac{ffy}{cc}$. D'où l'on voit que la raison de A M à AT est constante ; & partant que l'angle A M T est est par tout le même.

La courbe L M est appellée en ce cas *Logarithmique spirale.* (*Consultez la Note vingt-quatrieme.*)

PROPOSITION XIV.

PROBLÉME.

43. SOIENT *sur un même plan deux courbes quelconques* AMD, BMC (*Fig.* 28. *Pl.* 2.) *qui se touchent en un point* M, *& soit sur le plan de la courbe* B M C *un point fixe* L. *Si l'on conçoit à present que la courbe* BMC *roule sur la courbe* AMD *en s'y appliquant continuellement, ensorte que les parties révolues* A M, BM *soient toujours égales entr'elles ; il est visible que le plan* B M C *emportant le point* L, *ce point décrira dans ce mouvement une espèce de roulette* I L K. *Cela posé, je dis que si l'on mene dans chaque différente position de la courbe* BMC (*du point décrivant* L *au point touchant* M) *la droite* LM ; *elle sera perpendiculaire à la courbe* I L K.

Car imaginant sur les deux courbes A M D, BMC deux parties *Mm*, *Mm* égales entr'elles & insiniment petites, on les pourra considérer (*Art.* 3.) comme deux petites droites qui font au point M un angle infiniment petit. Or afin

que le petit côté *Mm* de la courbe ou poligone BMC tombe ſur le petit côté *Mm* du poligone AMD, il faut que le point L décrive autour du point touchant M comme centre un petit arc L*l*. Il eſt donc évident que ce petit arc fera partie de la courbe ILK; & par conſéquent que la droite ML, qui lui eſt perpendiculaire, ſera auſſi perpendiculaire ſur la courbe ILK au point L. Ce qu'il falloit prouver.

PROPOSITION XV.

PROBLÊME.

44. SOIT *un angle rectiligne quelconque* MLN, (*Fig.* 29. *Pl.* 2.) *dont les côtés* LM, LN *touchent deux courbes quelconques* AM, BN. *Si l'on fait gliſſer ces côtés autour de ces courbes, enſorte qu'ils les touchent continuellement; il eſt clair que le ſommet* L *décrira dans ce mouvement une courbe* ILK. *Il eſt queſtion de mener une perpendiculaire* LC *ſur cette courbe, la poſition de l'angle* MLN *étant donnée.*

Soit décrit un cercle qui paſſe par le ſommet L, & par les points touchans M, N; ſoit menée par le centre C de ce cercle la droite CL: je dis qu'elle ſera perpendiculaire à la courbe ILK.

Car conſidérant les courbes AM, BN comme des poligones d'une infinité de côtés, tels que *Mm*, *Nn*; il eſt évident que ſi l'on fait gliſſer les côtés LM, LN, de l'angle rectiligne MLN, qu'on ſuppoſe demeurer toujours le même, autour des points fixes M, N, (on conſidére les tangentes

LM, LN comme la continuation des petits côtés Mf, Ng) jusqu'à ce que le côté LM de l'angle tombe sur le petit côté M*m* du poligone AM & l'autre côté LN sur le petit côté N*n* du poligone BN ; le sommet L décrira une petite partie L*l* de l'arc de cercle MLN, puisque par la construction cet arc est capable de l'angle donné MLN. Cette petite partie L*l* sera donc commune à la courbe ILK ; & par conséquent la droite CL, qui lui est perpendiculaire, sera aussi perpendiculaire sur cette courbe au point L. Ce qu'il falloit démontrer.

PROPOSITION XVI.

PROBLÉME.

45. SOIT ABCD (*Fig. 32. Pl. 3.*) *une corde parfaitement fléxible à laquelle soient attachés différens poids* A, B, C, *&c. qui ayent entr'eux tels intervalles* AB, BC, *&c. que l'on voudra. Si l'on traîne cette corde sur un plan horizontal par l'extrêmité* D, *le long d'une courbe donnée* DP ; *il est clair que ces poids se disposeront, ensorte qu'ils feront tendre la corde, & qu'ils décriront ensuite des courbes* AM, BN, CO, *&c. On demande la maniere d'en tirer les tangentes, la position de la corde* ABCD *étant donnée avec la grandeur des poids.*

Dans le premier instant que l'extrêmité D avance vers P, les poids A, B, C, décrivent ou tendent à décrire autant de petits côtés A*a*, B*b*, C*c* des poligones qui composent les courbes

AM, BN, CO ; & par conſéquent il ne faut pour en mener les tangentes AB, BG, CK, que déterminer la direction des poids, A, B, C dans ce premier inſtant, c'eſt-à-dire, la poſition des droites qu'ils tendent à décrire. Pour la trouver, je remarque

1°. Que le poids A eſt tiré dans ce premier inſtant ſuivant la direction AB ; & comme il n'y a aucun obſtacle qui s'oppoſe à cette direction, puiſqu'il ne traîne après lui aucun poids, il la doit ſuivre ; & partant la droite AB ſera la tangente en A de la courbe A M.

2°. Que le poids B eſt tiré ſuivant la direction BC ; mais parce qu'il traîne après lui le poids A qui n'eſt pas dans cette direction, & qui doit par conſéquent y apporter quelque changement, le poids B n'aura pas ſa direction ſuivant BC, mais ſuivant une autre droite BG, dont il faut trouver la poſition. Ce que je fais ainſi.

Je décris ſur B C comme diagonale le rectangle E F, dont le côté BF eſt ſur AB prolongée ; & ſuppoſant que la force avec laquelle le poids B eſt tiré ſuivant BC, s'exprime par BC, il eſt viſible par les regles de la Mécanique, que cette force BC ſe peut partager en deux autres BE & BF, c'eſt-à-dire, que le poids B étant tiré ſuivant la direction BC par la force BC, c'eſt la même choſe que s'il étoit tiré en même tems par la force BE ſuivant la direction BE, & par la force BF ſuivant la direction BF. Or le poids A ne s'oppoſe point à la direction BE, puiſqu'elle lui eſt per-

pendiculaire ; & par conséquent la force BE ſuivant cette direction demeure toute entiere : mais il s'oppoſe avec toute ſa peſanteur à la direction BF. Afin donc que le poids B avec la force BF vainque la réſiſtance du poids A, il faut que cette force ſe diſtribue dans ces poids à proportion de leurs maſſes ou grandeurs : c'eſt pourquoi ſi l'on diviſe EC au point G, enſorte que CG ſoit à GE comme le poids A au poids B ; il eſt clair que EG exprimera la force reſtante avec laquelle le poids B tend à ſe mouvoir ſuivant la direction BF, après avoir vaincu la réſiſtance du poids A. Il eſt donc évident que le poids B eſt tiré en même tems par la force BE ſuivant la direction BE, & par la force EG ſuivant la direction BF ou EC ; & partant qu'il tendra à aller par BG avec la force BG : c'eſt-à-dire, que BG ſera ſa direction, & par conſéquent tangente en B de la courbe BN.

3°. Pour avoir la tangente CK, je forme ſur CD comme diagonale le rectangle HI, dont le côté CI eſt ſur BC prolongée ; & je vois que le poids B ne réſiſte point à la force CH avec laquelle le poids C eſt tiré ſuivant la direction CH, mais bien à la force CI avec laquelle il eſt tiré ſuivant la direction CI, & de plus que le poids A réſiſte auſſi à cette force. Pour ſçavoir de combien, je tire AL perpendiculaire ſur CB prolongée du côté de B, & je remarque que ſi AB exprime la force avec laquelle le poids A eſt tiré ſuivant la direction AB, BL exprimera celle avec

laquelle ce même poids A eſt tiré ſuivant la direction BC ; de ſorte que le poids C avec la force CI doit vaincre le poids entier B, & de plus une partie du poids A qui eſt à ce poids A comme BL eſt à BA, ou BF à BC. Si donc l'on fait $B + \frac{A \times BF}{BC} . C :: DK . KH$, il eſt clair que CK ſera la direction du poids C, & par conſéquent la tangente en C de la troiſieme courbe CO.

Si le nombre des courbes étoit plus grand, on trouveroit de la même maniere la tangente de la quatrieme, cinquieme, &c. Et ſi l'on vouloit avoir les tangentes des courbes décrites par les points moyens entre les poids, on les trouveroit par l'art. 36. (*Voyez la Note* 25.).



SECTION III.

Usage du calcul des différences pour trouver les plus grandes & les moindres appliquées, où se réduisent les questions De maximis & minimis.

DÉFINITION I.

SOIT une ligne courbe MDM (*Fig.* 30. 31. 33. 34. *Pl.* 2. & 3.) dont les appliquées PM, ED, PM soient paralleles entre'elles, & qui soit telle que la coupée AP croissant continuellement, l'appliquée PM croisse aussi jusqu'à un certain point E, après lequel elle diminue; ou au contraire qu'elle diminue jusqu'à un certain point E, après lequel elle croisse. Cela posé.

La ligne ED sera nommée *la plus grande* ou *la moindre* appliquée.

DÉFINITION II.

Si l'on propose une quantité telle que PM, qui soit composée d'une ou de plusieurs indéterminées telles que AP, laquelle AP croissant continuellement, cette quantité PM croisse aussi jusqu'à un certain point E, après lequel elle diminue, ou au contraire; & qu'il faille trouver pour AP, une valeur AE telle que la quantité ED qui en est composée, soit plus grande ou moindre que toute autre quantité PM semblablement formée de AP. Cela s'appelle une question *De maximis & minimis.*

PROPOSITION
GÉNÉRALE.

46. LA *nature de la ligne courbe* MDM *étant donnée ; trouver pour* AP *une valeur* AE *telle que l'appliquée* ED *ſoit la plus grande ou la moindre de ſes ſomblables* PM.

Lorſque AP croiſſant, PM croît auſſi ; il eſt évident (*Art.* 8. 10.) que ſa différence R*m* ſera poſitive par rapport à celle de AP ; & qu'au contraire lorſque PM diminue, la coupée AP croiſſant toujours, ſa différence ſera négative. Or toute quantité qui croît ou diminue continuellement, ne peut devenir de poſitive négative, qu'elle ne paſſe par l'infini ou par le zero ; ſçavoir par le zero lorſqu'elle va d'abord en diminuant, & par l'infini lorſqu'elle va d'abord en augmentant. D'où il ſuit que la différence d'une quantité qui exprime un *plus grand* ou un *moindre*, doit être égale à zero ou à l'infini. Or la nature de la courbe MDM étant donnée, on trouvera (*Sect.* 1. *ou* 2.) une valeur de R*m*, laquelle étant égalée d'abord à zero, & enſuite à l'infini, ſervira à découvrir la valeur cherchée de AE dans l'une ou l'autre de ces ſuppoſitions.

REMARQUE.

47. LA tangente en D (*Fig.* 30. 31. *Pl.* 2.) eſt parallele à l'axe AB, lorſque la différence R*m* devient nulle dans ce point ; mais lorſqu'elle devient infinie, la tangente ſe confond avec l'appli-

quée ED. (*Fig.* 33. 34. *Pl.* 3.) D'où l'on voit que la raiſon de m R à R M, qui exprime celle de l'appliquée à la ſoutangente, eſt nulle ou infinie ſous le point D.

On conçoit aiſément qu'une quantité, qui diminue continuellement, ne peut devenir de poſitive négative ſans paſſer par le zero; mais on ne voit pas avec la même évidence que lorſqu'elle augmente, elle doive paſſer par l'infini. C'eſt pourquoi pour aider l'imagination, ſoient entendues des tangentes aux points M, D, M; (*Fig.* 30. 31. *Pl.* 2.) il eſt clair dans les courbes où la tangente en D eſt parallele à l'axe A B, que la ſoutangente P T augmente continuellement à meſure que les points M, P, approchent des points D, E; & que le point M tombant en D, elle devient infinie; & qu'enfin lorſque A P ſurpaſſe A E, la ſoutangente P T devient (*Art.* 10.) négative de poſitive qu'elle étoit, ou au contraire. (*Conſultez la Note* 26.)

EXEMPLE I.

48. SUPPOSONS que $x^3 + y^3 = axy$ (A P $= x$, P M $= y$, A B $= a$) (*Fig.* 35. *Pl.* 3.) exprime la nature de la courbe M D M. On aura en prenant les différences $3xxdx + 3yydy = axdy + aydx$, & $dy = \frac{aydx - 3xxdx}{3yy - ax} = o$, lorſque le point P tombe ſur le point cherché E, d'où l'on tire $y = \frac{3xx}{a}$; & ſubſtituant cette valeur à la place de y dans l'équation $x^3 + y^3 = axy$, on trouve pour

AE une valeur $x = \frac{1}{3} a \sqrt[3]{2}$ telle que l'appliquée ED sera plus grande que toutes ses semblables PM. (*Consultez la Note vingt-septieme.*)

EXEMPLE II.

49. SOIT $y - a = a^{\frac{1}{3}} \times \overline{a - x}^{\frac{2}{3}}$, l'équation qui exprime la nature de la courbe MDM. (*Fig.* 33. *Pl.* 3.) On aura en prenant les différences, $dy = - \frac{2dx\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a-x}}$ que j'égale d'abord à zero ; mais parce que cette supposition me donne $-2dx\sqrt[3]{a} = o$ qui ne peut faire connoître la valeur de AE, j'égale ensuite $\frac{-2dx\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a-x}}$ à l'infini, ce qui me donne $3\sqrt[3]{a-x} = o$; d'où l'on tire $x = a$, qui est la valeur cherchée de AE. (*Consultez le Note vingt-huitieme.*)

EXEMPLE III.

50. SOIT une demie roulette accourcie AMF, (*Fig.* 36. *Pl.* 3.) dont la base BF est moindre que la demi-circonférence ANB du cercle générateur qui a pour centre le point C. Il faut déterminer le point E sur le diamètre AB, en sorte que l'appliquée ED soit la plus grande qu'il est possible.

Ayant mené à discrétion l'appliquée PM qui coupe le demi-cercle en N, on concevra à l'ordinaire aux points M, N, les petits triangles MR*m*, NS*n*, & nommant les indéterminées AP, *x*; PN, *z*; l'arc AN, *u*; & les données ANB, *a*;

BF, b; CA ou CN, c; l'on aura par la propriété de la roulette ANB (a) . BF (b) : : AN (u) . NM $= \frac{bu}{a}$. Donc PM $= z + \frac{bu}{a}$, & sa différence Rm $= \frac{adz + bdu}{a} = o$ lorsque le point P tombe au point cherché E. Or les triangles rectangles NSn, NPC sont semblables ; car si l'on ôte des angles droits CNn, PNS l'angle commun CNS, les restes SNn, PNC seront égaux. Et partant CN (c) . CP ($c - x$) : : Nn (du) . Sn (dz) $= \frac{cdu - xdu}{c}$. Donc en mettant cette valeur à la place de dz dans $adz + bdu = o$, on trouvera $\frac{acdu - axdu + bcdu}{c} = o$, d'où l'on tirera x (qui est en ce cas AE) $= c + \frac{bc}{a}$.

Il est donc évident que si l'on prend CE du côté de B quatrieme proportionnelle à la demi-circonférence ANB, à la base BF, & au rayon CB, le point E sera celui qu'on cherche. (*Consultez la Note vingt-neuvieme.*)

EXEMPLE IV.

51. COUPER la ligne donnée AB (*Fig.* 35. *Pl.* 3.) en un point E, ensorte que le produit du quarré de l'une des parties AE par l'autre EB, soit le plus grand de tous les autres produits formés de la même maniere.

Ayant nommé l'inconue AE, x; & la donnée AB, a; on aura $\overline{AE}^2 \times EB = axx - x^3$,

qui doit être un *plus grand*. C'eſt pourquoi on imaginera une ligne courbe MDM, telle que la relation de l'appliquée MP (y) à la coupée AP (x) ſoit exprimée par l'équation $y = \frac{axx - x^3}{aa}$, & on cherchera un point E tel que l'appliqueé ED ſoit la plus grande de toutes ſes ſemblables PM; ce qui donne $dy = \frac{2axdx - 3xxdx}{aa} = o$, d'où l'on tire AE ($x$) $= \frac{2}{3}a$.

Si l'on veut en général que $x^m \times \overline{a - x}^n$ ſoit un *plus grand* (m & n peuvent marquer tels nombres qu'on voudra), il faudra que la différence de ce produit ſoit égale à zero ou à l'infini, ce qui donne $mx^{m-1}dx \times \overline{a - x}^n - n\overline{a - x}^{n-1} dx \times x^m = o$, d'où en diviſant par $x^{m-1} \times \overline{a - x}^{n-1} dx$, l'on tire $am - mx - nx = o$, & AE (x) $= \frac{m}{m+n}a$.

Si $m = 2$, & $n = -1$, l'on aura AE $= 2a$, & il faudra alors énoncer le Problême ainſi.

Prolonger la ligne donnée AB (*Fig.* 37. *Pl.* 3.) du côté de B en un point E, enſorte que la quantité $\frac{\overline{AE}^2}{BE}$ ſoit *un moindre*, & non pas un *plus grand*; car l'équation à la courbe MDM ſera $\frac{xx}{x - a} = y$, dans laquelle ſi l'on ſuppoſe $x = a$, l'appliquée PM qui devient BC ſera $\frac{aa}{o}$, c'eſt-à-dire, infinie; & ſuppoſant x infinie, l'on aura $y = x$, c'eſt-à-dire, que l'appliquée ſera auſſi infinie.

Si $m = 1$, & $n = -2$, l'on aura $AE = -a$; d'où il ſuit que l'on doit énoncer le Problême alors en cette ſorte.

Prolonger la droite donnée AB (*Fig.* 38. *Pl.* 3.) du côté de A en un point E, enſorte que la quantité $\frac{AE \times \overline{AB}^2}{\overline{BE}^2}$ ſoit plus grande que toute autre quantité ſemblable $\frac{AP \times \overline{AB}^2}{\overline{BP}^2}$. (*Conſultez la Note trentieme.*)

EXEMPLE V.

52. La ligne droite AB (*Fig.* 39. *Pl.* 3.) étant diviſée en trois parties AC, CF, FB, il faut couper ſa partie du milieu CF au point E, enſorte que le rapport du rectangle $AE \times EB$ au rectangle $CE \times EF$ ſoit moindre que tout autre rapport formé de la même maniere.

Ayant nommé les données AC, a; CF, b; CB, c; & l'inconnue CE, x; l'on aura $AE = a + x$, $EB = c - x$, $EF = b - x$, & partant le rapport de $AE \times EB$ à $CE \times EF$ ſera $\frac{ac + cx - ax - xx}{bx - xx}$ qui doit être *un moindre*. C'eſt pourquoi ſi l'on imagine une ligne courbe MDM, telle que la relation de l'appliquée PM (y) à la coupée CP (x) ſoit exprimée par l'équation $y = \frac{aac + acx - aax - axx}{bx - xx}$, la queſtion ſe réduit à trouver pour x une valeur CE telle que l'appli-

quée ED ſoit la moindre de toutes ſes ſemblables PM. On formera donc (en prenant les différences, & diviſant enſuite par adx) l'égalité $cxx - axx - bxx + 2acx - abc = o$, dont l'une des racines réſout la queſtion.

Si $c = a + b$, l'on aura $x = \frac{1}{2} b$. (*Conſultez la Note trente-unieme.*)

EXEMPLE VI.

53. ENTRE tous les Cones qui peuvent être inſcrits dans une ſphére déterminer celui qui a la plus grande ſurface convexe.

La queſtion ſe réduit à déterminer ſur le diamètre AB du demi-cercle AFB (*Fig.* 40. *Pl.* 3.) le point E; enſorte qu'ayant mené la perpendiculaire EF, & joint AF, le rectangle AF×FE ſoit le plus grand de tous ſes ſemblables AN×NP. Car ſi l'on conçoit que le demi-cercle AFB faſſe une révolution entiere autour du diamètre AB, il eſt clair qu'il décrira une ſphére, & que les triangles rectangles AEF, APN décriront des cones inſcrits dans cetre ſphére, dont les ſurfaces convexes décrites par les cordes AF, AN, ſeront entr'elles comme les rectangles AF×FE, AN×NP.

Soit donc l'inconnue AE $= x$, la donnée AB $= a$, on aura par la propriété du cercle AF $= \sqrt{ax}$, EF $= \sqrt{ax - xx}$; & partant AF × FE $= \sqrt{aaxx - ax^3}$ qui doit être un *plus grand.* C'eſt pourquoi on imaginera une ligne courbe MDM telle que la relation de l'appliqueé PM (y) à la coupée AP (x) ſoit exprimée par l'équation

quation $\frac{\sqrt{aaxx - ax^3}}{a} = y$; & l'on cherchera le point E, enſorte que l'appliquée ED ſoit plus grande que toutes ſes ſemblables PM. On aura donc en prenant la différence $\frac{2axdx - 3xxdx}{2\sqrt{aaxx - ax^3}} = o$; d'où l'on tire AE $(x) = \frac{2}{3}a$. (*Conſultez la Note trente-deuxieme.*)

EXEMPLE VII.

54. On demande entre tous les Parallélepipédes égaux à un cube donné a^3, & qui ont pour un de leurs côtés la droite donnée b, celui qui a la moindre ſuperficie.

Nommant x un des deux côtés que l'on cherche, l'autre ſera $\frac{a^3}{bx}$; & prenant les plans alternatifs des trois côtés b, x, $\frac{a^3}{bx}$ du parallélepipéde, leur ſomme ſçavoir $bx + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{b}$ ſera la moitié de ſa ſuperficie qui doit être *un moindre*. C'eſt pourquoi concevant à l'ordinaire une ligne courbe qui ait pour équation $\frac{bx}{a} + \frac{aa}{x} + \frac{aa}{b} = y$, l'on trouvera en prenant la différence $\frac{bdx}{a} - \frac{aadx}{xx} = o$, d'où l'on tire $xx = \frac{a^3}{b}$, & $x = \sqrt{\frac{a^3}{b}}$; de ſorte que les trois côtés du parallélepipéde qui ſatisfait à la queſtion, ſeront le premier b, le ſecond $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$,

& le troisieme $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$. D'où l'on voit que les deux côtés que l'on cherchoit, sont égaux entr'eux. (*Consultez la Note trente-troisieme.*)

EXEMPLE VIII.

55. On demande présentement entre tous les Parallélepipédes qui sont égaux à un cube donné a^3, celui qui a la moindre superficie.

Nommant x un des côtés inconnus, il est clair par l'exemple précédent, que les deux autres côtés seront chacun $\sqrt{\frac{a^3}{x}}$; & partant la somme des plans alternatifs qui est la moitié de la superficie, sera $\frac{a^3}{x} + 2\sqrt{a^3 x}$ qui doit être *un moindre*. C'est pourquoi sa différence $-\frac{a^3 dx}{xx} + \frac{a^3 dx}{\sqrt{a^3 x}} = 0$, d'où l'on tire $x = a$; & par conséquent les deux autres côtés seront aussi chacun $= a$; de sorte que le cube même donné satisfait à la question.

EXEMPLE IX.

56. La ligne AEB (*Fig.* 41. *Pl.* 3.) étant donnée de position sur un plan avec deux points fixes C, F; & ayant mené à un de ses points quelconques P deux droites CP (u), PF (z); soit donnée une quantité composée de ces indéterminées u & z, & de telles autres droites données a, b, &c. qu'on voudra. On demande qu'elle doit être la position des droites CE, EF, afin que la quantité donnée, qui en est composée,

ſoit plus grande ou moindre que cette quantité, lorſqu'elle eſt compoſée des droites C P, PF.

Suppoſons que les lignes CE, EF ayent la poſition requiſe; & ayant joint CF, concevons une ligne courbe DM, telle qu'ayant mené à diſcrétion PQM perpendiculaire ſur CF, l'appliquée QM exprime la quantité donnée : il eſt clair que le point P tombant au point E, l'appliquée QM qui devient OD, doit être la moindre ou la plus grande de toutes ſes ſemblables. Il faudra donc que ſa différence ſoit alors égale à zero ou à l'infini : c'eſt pourquoi ſi la quantité donnée eſt, par exemple, $au + zz$, l'on aura $adu + 2zdz = o$, & par conſéquent $du . -dz :: 2z . a$. D'où l'on voit déja que dz doit être négative par rapport à du; c'eſt-à-dire, que la poſition des droites CE, EF doit être telle que u croiſſant, z diminue.

Maintenant ſi l'on mene EG perpendiculaire à la ligne AEB, & d'un de ſes points quelconques G les perpendiculaires GL, GI ſur CE, EF; & qu'ayant tiré par le point e pris infiniment près de E, les droites CKe, FeH, on décrive des centres C, F les petits arcs de cercle EK, EH : on formera les triangles rectangles ELG & EKe, EIG & EHe, qui ſeront ſemblables entr'eux; car ſi l'on ôte des angles droits GEe, LEK le même angle LEe, les reſtes LEG, KEe ſeront égaux; on prouvera de même que les angles IEG, HEe ſeront égaux. On aura donc GL. GI

:: K*e* (*du*). H*e* ($-dz$) :: $2z \cdot a$. D'où il ſuit que la poſition des droites CE, EF doit être telle qu'ayant mené la perpendiculaire EG ſur la ligne AEB; le ſinus GL de l'angle GEC ſoit au ſinus GI de l'angle GEF, comme les quantités qui multiplient dz ſont à celles qui multiplient du. Ce qu'il falloit trouver. (*Conſultez la Note trente-quatrieme.*).

COROLLAIRE.

57. SI l'on veut à préſent que la droite CE ſoit donnée de poſition & de grandeur, que la droite EF le ſoit de grandeur ſeulement, & qu'il faille trouver ſa poſition, il eſt clair que l'angle GEC étant donné, ſon ſinus GL le ſera auſſi, & par conſéquent le ſinus GI de l'angle cherché GEF. Donc ſi l'on décrit un cercle du diamètre EG, & que l'on porte la valeur de GI ſur ſa circonférence de G en I; la droite EF qui paſſe par le point I aura la poſition requiſe.

Soit $au + bz$ la quantité donnée; on trouvera $GI = \frac{a \times GL}{b}$; d'où l'on voit que quelque longueur qu'on donne à EC & à EF, la poſition de cette derniere ſera toujours la même, puiſqu'elles n'entrent point dans la valeur de GI, qui par conſéquent ne change point. Si $a = b$, il eſt clair que la poſition de EF doit être ſur CE prolongée du côté de E; puiſque GL = GI, lorſque les points C, F tombent de part & d'autre de la

ligne AEB : mais lorſqu'ils tombent du même côté, l'angle FEG (*Fig.* 42. *Pl.* 3.) doit être pris égal à l'angle CEG.

EXEMPLE X.

58. LE cercle AEB (*Fig.* 42. *Pl.* 3.) étant donné de poſition avec les points C, F hors de ce cercle ; trouver ſur ſa circonférence le point E tel que la ſomme des droites CE, EF ſoit la moindre qu'il eſt poſſible.

Suppoſant que le point E ſoit celui que l'on cherche ; & menant par le centre O la ligne OEG, il eſt clair qu'elle ſera perpendiculaire ſur la circonférence AEB ; & partant (*Art.* 57.) que les angles FEG, CEG ſeront égaux entr'eux. Si donc l'on mene EH, enſorte que l'angle EHO ſoit égal à l'angle CEO, & de même EK, enſorte que l'angle EKO ſoit égal à l'angle FEO, & les paralleles ED, EL à OF, OC ; on formera les triangles ſemblables OCE & OEH, OFE & OEK, HDE & KLE ; & en nommant les connues OE ou OA ou OB, a ; OC, b ; OF, c ; & les inconnues OD ou LE, x ; DE ou OL, y ; l'on aura OH $= \frac{aa}{b}$, OK $= \frac{aa}{c}$, & HD ($x - \frac{aa}{b}$). DE (y) : : KL ($y - \frac{aa}{c}$). LE (x). Donc $xx - \frac{aax}{b} = yy - \frac{aay}{c}$, qui eſt une équation à une hyperbole que l'on conſtruira facilement, & qui coupera le cercle au point cherché E.

(*Consultez la Note trente-cinquieme-*)

EXEMPLE XI.

59. UN voyageur partant du lieu C (*Fig* 43. *Pl.* 3.) pour aller au lieu F, doit traverser deux campagnes séparées par la ligne droite AEB. On suppose qu'il parcourt dans la campagne du côté C l'espace a dans le temps c, & dans l'autre du côté de F l'espace b dans le même tems c: on demande par quel point E de la droite AEB il doit passer, afin qu'il employe le moins de tems qu'il est possible pour parvenir de C en F. Si l'on fait a. CE (u) : : c. $\frac{cu}{a}$. Et b. EF (z) : : c. $\frac{cz}{b}$. Il est clair que $\frac{cu}{a}$ exprime le temps que le voyageur employe à parcourir la droite CE, & de même que $\frac{cz}{b}$ exprime celui qu'il employe à parcourir EF; de sorte que $\frac{cu}{a}+\frac{cz}{b}$ doit être un *moindre*. D'où il suit (*Art.* 56.) qu'ayant mené EG perpendiculaire sur la ligne AB; le sinus de l'angle GEC doit être au sinus de l'angle GEF, comme a est à b.

Cela posé, si l'on décrit du point cherché E, comme centre, de l'intervalle EC, le cercle CGH, & qu'on mene sur la droite AEB les perpendiculaires CA, HD, FB, & sur CE, EF les perpendiculaires GL, GI; l'on aura a. b : : GL. GI. Or GL = AE, & GI = ED, parce que les triangles rectangles GEL & ECA, GEI

& EHD ſont égaux & ſemblables entr'eux, comme il eſt facile à prouver. C'eſt pourquoi ſi l'on nomme l'inconnue AE, x; on trouvera ED $=\frac{bx}{a}$: & nommant les connues AB, f; AC, g; BF, h; les triangles ſemblables EBF, EDH donneront EB ($f-x$). BF (h) :: ED ($\frac{bx}{a}$). DH $=\frac{bhx}{af-ax}$. Mais à cauſe des triangles rectangles EDH, EAC, qui ont leurs hypothenuſes EH, EC égales, l'on aura $\overline{ED}^2+\overline{DH}^2=\overline{EA}^2+\overline{AC}^2$, c'eſt-à-dire, en termes analytiques, $\frac{bbxx}{aa}+\frac{bbhhxx}{aaff-2aafx+aaxx}=xx+gg$: De ſorte que ôtant les fractions, & ordonnant enſuite l'égalité, il viendra

$$\begin{array}{lllll} aax^4 & -2aafx^3 & +aaffxx & -2aafggx & +aaffgg=0. \\ & -bb & +2bbf & +aagg & \\ & & & -bbff & \\ & & & -bbhh & \end{array}$$

On peut encore trouver cette équation de la maniere qui ſuit, ſans avoir recours à l'exemple 9.

Ayant nommé comme auparavant les connues AB, f; AC, g; BF, h; & l'inconnue AE, x; on fera a. CE ($\sqrt{gg+xx}$) :: c. $\frac{c\sqrt{gg+xx}}{a}$ = au tems que le voyageur employe à parcourir la droite CE. Et de même b. EF ($\sqrt{ff-2fx+xx+hh}$) :: c. $\frac{c\sqrt{ff-2fx+xx+hh}}{b}$ = au tems que le voya-

geur employe à parcourir la droite EF. Ce qui fera $\frac{c\sqrt{gg+xx}}{a} + \frac{c\sqrt{ff-2fx+xx+hh}}{b} =$ à un *moindre* ; & partant sa différence $\frac{cxdx}{a\sqrt{gg+xx}} + \frac{cxdx-cfdx}{b\sqrt{ff-2fx+xx+hh}}$ $=o$; d'où l'on tire, en divisant par cdx & en ôtant les incommensurables, la même égalité que ci-devant, dont l'une des racines fournira pour A E la valeur qu'on cherche. (*Consultez la Note trente-sixieme.*)

EXEMPLE XII.

60. SOIT une poulie F (*Fig.* 44. *Pl.* 3.) qui pend librement au bout d'une corde CF attachée en C, avec un plomb D suspendu par la corde DFB qui passe au-dessus de la poulie F, & qui est attachée en B, ensorte que les points C, B sont situés dans la même ligne horizontale CB. On suppose que la poulie & les cordes n'ayent aucune pesanteur ; & l'on demande en quel endroit le plomb D, ou la poulie F doit s'arrêter.

Il est clair par les principes de la Mécanique que le plomb D descendra le plus bas qu'il lui sera possible, au-dessous de l'horizontale CB ; d'où il suit que la ligne à plomb DFE doit être un *plus grand*. C'est pourquoi nommant les données CF, a ; DFB, b ; CB, c ; & l'inconnue CE, x ; l'on aura EF $= \sqrt{aa-xx}$, FB $= \sqrt{aa+cc-2cx}$, & DFE $= b - \sqrt{aa+cc-2cx} + \sqrt{aa-xx}$ qui doit être un *plus grand* ; & partant sa diffé-

rence $\frac{cdx}{\sqrt{aa+cc-2cx}} - \frac{xdx}{\sqrt{aa-xx}} = o$, d'où l'on tire $2cx^3 - 2ccxx - aaxx + aacc = o$, & divisant par $x-c$, il vient $2cxx - aax - aac = o$, dont l'une des racines fournit pour CE une valeur telle que la perpendiculaire ED passe par la poulie F & le plomb D, lorsqu'ils sont en repos.

On pourroit encore résoudre cette question d'une autre maniere que voici.

Nommant EF, y; BF, z; l'on aura $b - z + y =$ à un *plus grand*; & partant $dy = dz$. Or il est clair que la poulie F décrit le cercle CFA autour du point C comme centre; & partant si du point f pris infiniment près de F, l'on mene fR parallele à CB, & fS perpendiculaire sur BF, l'on aura FR $= dy$, & FS $= dz$. Elles seront donc égales entr'elles; & par conséquent les petits triangles rectangles FRf, FSf, qui ont de plus l'hypothénuse Ff commune, seront égaux & semblables; d'où l'on voit que l'angle RFf est égal à l'angle SFf, c'est-à-dire, que le point F doit être tellement situé dans la circonférence FA, que les angles faits par les droites EF, FB sur les tangentes en F, soient égaux entr'eux : ou bien (ce qui revient au même) que les angles BFC, DFC soient égaux.

Cela posé, si l'on mene FH, ensorte que l'angle FHC soit égal à l'angle CFB ou CFD; les triangles CBF, CFH seront semblables; comme aussi les triangles réctangles ECF, EFH, puis-

que l'angle CFE eſt égal à l'angle FHE, étant l'un & l'autre le complément à deux droits, des angles égaux FHC, CFD; & par conſéquent on aura $CH = \frac{aa}{c}$, & $HE(x - \frac{aa}{c}) . EF(y)$ $:: EF(y) . EC(x)$. Donc $xx - \frac{aax}{c} = yy = aa - xx$ par la propriété du cercle, d'où l'on tire la même égalité que ci-devant.

EXEMPLE XIII.

61. L'ÉLÉVATION du pole étant donnée, trouver le jour du plus petit crépuſcule.

Soit C (*Fig.* 45. *Pl.* 3.) le centre de la ſphére; APTOBHQ le méridien; HD*d*O l'horiſon; QE*e*T le cercle crépuſculaire parallele à l'horiſon; AMNB l'équateur; FEDG la portion du parallele à l'équateur, que décrit le Soleil le jour du plus petit crépuſcule, renfermée entre les plans de l'horiſon & du cercle crépuſculaire; P le pole auſtral; PEM, PDN des quarts de cercles de déclinaiſon. L'arc HQ ou OT du méridien compris entre l'horiſon & le cercle crépuſculaire, & l'arc OP de l'élévation du pole ſont donnés; & par conſéquent leurs ſinus droits CI ou FL ou QX, & OV. L'on cherche le ſinus CK de l'arc EM ou DN de la déclinaiſon du Soleil, lorſqu'il décrit le parallele ED.

S'imaginant une autre portion *fedg* d'un parallele à l'équateur, infiniment proche de FEDG, avec les quarts de cercle P*em*, P*dn*; il eſt clair que le tems que le Soleil

employe à parcourir l'arc ED, devant être un *moindre*, la différence de l'arc MN qui en eſt la meſure, & qui devient mn lorſque ED devient ed, doit être nulle ; d'où il ſuit que les petits arcs Mm, Nn, & par conſéquent les petits arcs Re, Sd, ſeront égaux entr'eux. Or les arcs RE, SD étant renfermés entre les mêmes paralleles ED, ed, ſont auſſi égaux, & les angles en S & en R ſont droits. Donc les petits triangles rectangles ERe, DSd (que l'on conſidére comme rectilignes (*Art.* 3.) à cauſe de l'infinie petiteſſe de leurs côtés), ſeront égaux & ſemblables ; & par conſéquent les hypothénuſes Ee, Dd ſeront auſſi égales entr'elles.

Cela poſé, les droites DG, EF, dg, ef commune ſections des plans FEDG, $fedg$ paralleles à l'équateur, avec l'horizon & le cercle crépuſculaire, ſeront perpendiculaires ſur les diamètres HO, QT, puiſque les plans de tous ces cercles ſeront perpendiculaires chacun ſur le plan du méridien ; & les petites droites Gg, Ff ſeront égales entr'elles, puiſque les droites FG, fg ſont paralleles. Donc $\sqrt{\overline{Dd}^2 - \overline{Gg}^2}$ ou $DG - dg = \sqrt{\overline{Ee}^2 - \overline{Ff}^2}$ ou $fe - FE$. Or il eſt clair par ce que l'on a démontré dans l'article 50. que ſi l'on mene à diſcrétion dans un demi-cercle deux appliquées infiniment proches, le petit arc qu'elles renferment, ſera à leur différence, comme le rayon eſt à la coupée depuis le centre, ce qui donne ici (à cauſe des cercles HDO, QET) CO. CG

: : D*d* ou E*e*. DG — *dg* ou *fe* — FE : : IQ . IF : : CO + IQ ou OX . CG + IF ou GL. Mais à cauſe des triangles rectangles ſemblables CVO, CKG, FLG, l'on aura CO . CG : : OV . GK. Et GK . GL : : CK . FL ou QX. Donc OV . CK : : OX . XQ : : XQ . XH par la propriété du cercle : c'eſt-à-dire, que ſi l'on prend QX pour le rayon ou ſinus total dans le triangle rectangle QXH, dont l'angle HQX eſt de 9 degrés, parce que les Aſtronomes font l'arc HQ de 18 degrés, l'on aura comme le ſinus total eſt à la tangente de 9 degrés, de même le ſinus de l'élevation du pole eſt au ſinus de la déclinaiſon auſtrale du Soleil dans le tems du plus petit crépuſcule. D'où il ſuit que ſi l'on ôte 0.8002875 du logarithme du ſinus de l'élevation du pole ; le reſte ſera le logarithme du ſinus cherché. Ce qu'il falloit trouver. (*Conſultez la Note trente-ſeptieme.*)



SECTION IV.

Usage du calcul des différences pour trouver les points d'inflexion & de rebroussement.

COMME l'on se servira dans la suite des différences secondes, troisiemes, &c. il est nécessaire d'en donner une idée avant que d'aller plus loin.

DÉFINITION I.

La portion infiniment petite dont la différence d'une quantité variable augmente ou diminue continuellement, est appellée la *différence de la différence* de cette quantité, ou bien sa *différence seconde*. Ainsi si l'on imagine une troisieme appliquée nq (*Fig.* 46. *Pl.* 3.) infiniment proche de la seconde mp, & qu'on mene mS parallele à AB, & mH parallele à RS; on appellera Hn la *différence de la différence* Rm, ou bien la *différence seconde* de PM.

De même si l'on imagine une quatrieme appliquée of infiniment proche de la troisieme nq, & qu'on mene nT parallele à AB, & nL parallele à ST; on appellera la différence des petites droites Hn, Lo, la *différence de la différence seconde*, ou bien la *différence troisieme* de PM. Et ainsi des autres. (*Voyez la Note* 38.)

AVERTISSEMENT.

On marquera dans la ſuite chaque différence par un nombre de d *qui en exprime l'ordre ou le genre. Par exemple, on marquera par* dd *la différence ſeconde ou du ſecond genre; par* ddd, *la différence troiſieme ou du troiſieme genre; par* dddd, *la différence quatrieme ou du quatrieme genre, & de même des autres. Ainſi* ddy *exprimera* Hn; dddy, Lo — Hn *ou* Hn — Lo, *&c.*

Quant aux puiſſances de ces différences, on les marquera par des chiffres poſtérieurs mis au-deſſus, comme l'on fait ordinairement celles des grandeurs entieres. Par exemple, le quarré, ou le cube de dy *ſera* dy^2, *ou* dy^3; *le quarré, ou le cube de* ddy *ſera* ddy^2, *ou* ddy^3; *celui de* dddy *ſera* $dddy^2$, *ou* $dddy^3$; *celui de* ddddy *ſera* $ddddy^2$, *ou* $ddddy^3$, *&c.* (*Voyez la Note* 39.)

COROLLAIRE I.

62. SI l'on nomme chacune des coupées AP, A*p*, A*q*, A*f*, *x*; chacune des appliquées PM, *pm*, *qn*, *fo*, *y*; & chacune des portions courbes AM, A*m*, A*n*, A*o*, *u*; il eſt clair que *dx* exprimera les différences P*p*, *pq*, *qf* des coupées; *dy* les différences R*m*, S*n*, T*o* des appliquées; & *du* les différences M*m*, *mn*, *no* des portions de la courbe AMD. Or afin de prendre, par exemple, la différence ſeconde H*n* de la variable PM, il faut imaginer ſur l'axe deux petites parties P*p*, *pq*,

& ſur la courbe deux autres Mm, mn pour avoir les deux différences Rm, Sn ; & partant ſi l'on ſuppoſe que les petites parties Pp, pq ſoient égales entr'elles ; il eſt clair que dx ſera conſtante par rapport à dy & à du, puiſque Pp qui devient pq demeure la même pendant que Rm qui devient Sn, & Mm qui devient mn, varient. On pourroit ſuppoſer que les petites parties de la courbe Mm, mn ſeroient égales entr'elles, & alors du ſeroit conſtante par rapport à dx & à dy ; & enfin ſi l'on ſuppoſoit que Rm & Sn fuſſent égales, dy ſeroit conſtante par rapport à dx & à du, & ſa différence Hn (ddy) ſeroit nulle.

De même pour prendre la différence troiſieme de PM, ou la différence de la différence ſeconde Hn, il faut imaginer ſur l'axe trois petites parties Pp, pq, qf ; ſur la courbe trois autres Mm, mn, no ; & ſur les appliquées auſſi trois autres Rm, Sn, To, & alors on aura dx ou du ou dy pour conſtante, ſelon qu'on ſuppoſera que les petites parties Pp, pq, qf, ou Mm, mn, no, ou Rm, Sn, To ſont égales entr'elles. Il en eſt de même des différences quatriemes, cinquiemes, &c.

Tout ceci ſe doit auſſi entendre des courbes AMD, (*Fig.* 47. *Pl.* 3.) dont les appliquées BM, Bm, Bn partent toutes d'un point fixe B ; car pour avoir, par exemple, la différence ſeconde de BM, il faut imaginer deux autres appliquées Bm, Bn qui faſſent des angles MBm,

mBn infiniment petits, & ayant décrit du centre B les petits arcs de cercle MR, mS; la différence des petites droites Rm, Sn, sera la différence seconde de BM; & l'on pourra prendre pour constants les petits arcs MR, mS, ou les petites portions de la courbe Mm, mn, ou enfin les petites droites Rm, Sn. Il en va de même pour les différences troisiemes, quatriemes, &c. de l'appliquée BM.

REMARQUE.

63. On doit bien remarquer, 1°. Qu'il y a différens ordres d'infiniment petits : que Rm, (*Fig.* 46. *Pl.* 3.) par exemple, est infiniment petite par rapport à PM, & infiniment grande par rapport à Hn; de même que l'espace MPpm est infiniment petit par rapport à l'espace APM, & infiniment grand par rapport au triangle MRm.

2°. Que la différence entiere Pf est encore infiniment petite par rapport à AP; parce que toute quantité qui est la somme d'un nombre fini de quantités infiniment petites, telles que Pp, pq, qf par rapport à une autre AP, demeure toujours infiniment petite par rapport à cette même quantité : & qu'afin qu'elle devienne du même ordre, il faut que le nombre des quantités de l'ordre inférieur qui la compose, soit infini.

COROLLAIRE II.

64. On peut marquer en cette sorte les différences secondes dans toutes les suppositions possibles.

1°.

1°. Dans les courbes où les appliquées mR, nS font paralleles entr'elles, (*Fig.* 48. 49. *Pl.* 3.) on prolongera la petite droite Mm en H où elle rencontre l'appliquée Sn; & ayant décrit du centre m, de l'intervalle mn, l'arc nk, on tirera les petites droites nl, li, kcg dont la premiere soit parallele à mS, & les deux autres à Sn. Cela posé, si l'on veut que dx soit constante, c'est-à-dire, que MR soit égale à mS; il est clair que le triangle mSH est semblable & égal au triangle MRm, & qu'ainsi Hn est ddy, c'est-à-dire, la différence de Rm & Sn; & $Hk = ddu$. Mais si l'on suppose que du soit constante, c'est-à-dire, que $Mm = mn$ ou à mk; il est évident alors que le triangle mgk est semblable & égal au triangle MRm, & qu'ainsi $kc = ddy$, & Sg ou $cn = ddx$. Enfin si l'on prend dy pour constante, c'est-à-dire, $mR = nS$, il s'ensuit que le triangle mil est égal & semblable au triangle MRm; & qu'ainsi iS ou $nl = ddx$, & $lk = ddu$.

2°. Dans les courbes dont les appliquées BM, Bm, Bn partent du même point B, (*Fig.* 50. 51. *Pl.* 3.) l'on décrira du centre B les arcs MR, mS, que l'on regardera (*Art.* 3.) comme de petites droites perpendiculaires sur Bm, Bn; & ayant prolongé Mm en E, & décrit du centre m, de l'intervalle mn, le petit arc nkE; on fera l'angle $EmH = mBn$, & l'on tirera les petites droites nl, li, kcg dont la premiere soit parallele à mS, & les deux autres

à Sn. Cela posé, à cause du triangle BSm rectangle en S, l'angle BmS + mBn, ou + EmH vaut un droit, & partant l'angle BmE, vaut un droit + SmH; il vaut aussi le droit MRm + RMm, puisqu'il est externe au triangle RMm. Donc l'angle SmH = RMm.

Il suit de ceci, 1°. Que si l'on veut que dx soit constante, c'est-à-dire que les petits arcs MR, mS soient égaux entr'eux, le triangle SmH sera semblable & égal au triangle RMm, & qu'ainsi Hn = ddy, & Hk = ddu. 2°. Que si l'on prend du pour constante, le triangle gmk sera semblable & égal au triangle RMm, & qu'ainsi kc exprimera ddy, & Sg ou cn, ddx. Enfin, 3°. Que si l'on prend dy pour constante, les triangles iml, RMm seront égaux & semblables; & qu'ainsi iS ou $ln = ddx$, & $lk = ddu$.

PROPOSITION I.

PROBLÉME.

65. PRENDRE *la différence d'une quantité composée de différences quelconques.*

On prendra pour constante la différence que l'on voudra, & traitant les autres comme des quantités variables, on se servira des régles prescrites dans la Section premiere.

La différence de $\frac{ydy}{dx}$, en prenant dx pour constante, sera $\frac{dy^2 + yddy}{dx}$, & $\frac{dxdy^2 - ydyddx}{dx^2}$ en prenant dy pour constante.

Celle de $\frac{z\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$, en prenant dx pour constante, sera $dz\sqrt{dx^2 + dy^2} + \frac{zdyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, le tout divisé par dx, c'est-à-dire $\frac{dzdx^2 + dzdy^2 + zdyddy}{dx\sqrt{dx^2 + dy^2}}$; & en prenant dy pour constante, elle sera $dzdx\sqrt{dx^2 + dy^2} + \frac{zdx^2ddx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} - zddx\sqrt{dx^2 + dy^2}$, le tout divisé par dx^2, c. à d. $\frac{dzdx^3 + dzdxdy^2 - zdy^2ddx}{dx^2\sqrt{dx^2 + dy^2}}$.

La différence de $\frac{ydy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, en prenant dx pour constante, sera $\overline{dy^2 + yddy}\sqrt{dx^2 + dy^2} - \frac{ydy^2ddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$; le tout divisé par $dx^2 + dy^2$, c'est-à-dire; $\frac{dx^2dy^2 + dy^4 + ydx^2ddy}{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}$; & en prenant dy pour constante, elle sera $\frac{dx^2dy^2 + dy^4 - ydydxddx}{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}$.

La différence de $\frac{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxddy}$ ou $\frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$, en prenant dx pour constante, sera $\frac{-3dxdyddy^2 \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{1}{2}} + dxdddy \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2ddy^2}$.

Mais il faut observer que dans ce dernier cas il n'est pas libre de prendre dy pour constante, car dans cette supposition sa différence ddy seroit nulle; & par conséquent elle ne devroit pas se rencontrer dans la quantité proposée. (*Consultez la Note* 40.)

DÉFINITION II.

Lorſqu'une ligne courbe AFK (*Fig.* 52. 53. 54. 55. *Pl.* 3. 4.) eſt en partie concave & en partie convexe vers une ligne droite AB ou vers un point fixe B ; le point F qui ſépare la partie concave de la convexe , & qui par conſéquent eſt la fin de l'une & le commencement de l'autre , eſt appellé point d'*infléxion* , lorſque la courbe étant parvenue en F continue ſon chemin vers le même côté : & point de *rebrouſſement* , lors qu'elle rebrouſſe chemin du côté de ſon origine.

PROPOSITION II.

PROBLÉME GÉNÉRAL.

66. L*A nature de la ligne courbe* AFK *étant donnée , déterminer le point d'infléxion ou de rebrouſſement* F.

Suppoſons en premier lieu que la ligne courbe AFK (*Fig.* 52. 53. *Pl.* 3. 4.) ait pour diamétre une ligne droite AB , & que ſes appliquées PM, EF , &c. ſoient toutes paralleles entr'elles. Si l'on mene par le point F , l'appliquée FE avec la tangente FL ; & par un point quelconque M de la partie AF , une appliquée MP avec une tangente MT : il eſt clair,

1°. Dans les courbes qui ont un point d'infléxion , que la coupée AP croiſſant continuellement , la partie AT du diamétre , interceptée entre l'origine des x & la rencontre de la tangente , croît auſſi juſqu'à ce que le point P tombe en E,

après quoi elle va en diminuant; d'où l'on voit que AT qui répond à l'appliquée en P, doit devenir un *plus grand* AL, lorſque le point P tombe ſur le point cherché E.

2°. Dans celles qui ont un point de rebrouſſement, que la partie AT croiſſant continuellement, la coupée AP croît auſſi juſqu'à ce que le point T tombe en L, après quoi elle va en diminuant; d'où l'on voit que AP qui répond à AT, doit devenir un *plus grand* AE, lorſque le point T tombe en L.

Or ſi l'on nomme AE, x; EF, y; l'on aura AL $= \frac{ydx}{dy} - x$, dont la différence, qui eſt $\frac{dy^2dx - ydxddy}{dy^2} - dx$ (en ſuppoſant dx conſtante), étant diviſée par dx différence de AE, doit être (*Art.* 47.) nulle ou infinie; ce qui donne $-\frac{yddy}{dy^2} = o$, ou à l'infini: de ſorte que multipliant par dy^2, & diviſant par $-y$, il vient $ddy = o$, ou à l'infini; ce qui ſervira dans la ſuite de formule générale pour trouver le point d'infléxion ou de rebrouſſement F. Car la nature de la courbe AFK étant donnée, l'on aura une valeur de dy en dx; & prenant la différence de cette valeur, en ſuppoſant dx conſtante, on trouvera une valeur de ddy en dx^2, laquelle étant égalée d'abord à zero, & enſuite à l'infini, ſervira dans l'une ou l'autre de ces ſuppoſitions à trouver pour AE une valeur, telle que l'appliquée EF aille couper la courbe AFK au point d'infléxion ou de rebrouſſement F.

L'origine A des x peut être tellement située que AL $= x - \frac{ydx}{dy}$, au lieu de $\frac{ydx}{dy} - x$, & que AL ou AE soit *un moindre* au lieu d'être un *plus grand* : mais comme la conséquence est toujours la même, & que cela ne peut faire aucune difficulté, je ne m'y arrêterai pas. Il est à remarquer que AL ne peut jamais être $= x + \frac{ydx}{dy}$, car lorsque le point T tombe de l'autre côté du point P, par rapport à l'origine A des x, la valeur de $\frac{ydx}{dy}$ sera négative suivant l'article 10, & par conséquent celle de $-\frac{ydx}{dy}$ sera positive, de sorte qu'on aura encore en ce cas AE + EL. ou AL $= x - \frac{ydx}{dy}$.

La même chose se peut encore trouver de cette autre manière. Il est clair qu'en prenant dx pour constante, & supposant que l'appliquée y augmente, Sn (*Fig.* 48. 49. *Pl.* 3.) est moindre que SH ou que Rm dans la partie concave, & plus grande dans la convexe. D'où l'on voit que la valeur de Hn (ddy) doit devenir de positive négative sous le point d'infléxion ou de rebroussement F ; & partant (*Art.* 47.) qu'elle y doit être ou nulle ou infinie.

Supposons en second lieu que la courbe AFK (*Fig.* 54. 55. *Pl.* 4.) ait pour appliquées les droites BM, BF, BM, qui partent toutes d'un même point B. Si l'on mene telle appliquée BM (*Fig.* 56. 57. *Pl.* 4.) qu'on voudra, avec une

tangente M T qui rencontre B T perpendiculaire à B M au point T ; & qu'ayant pris le point *m* infiniment près de M, l'on tire l'appliquée B*m*, la tangente *mt*, & la perpendiculaire B*t* sur B*m*, qui rencontre M T en O ; il eſt viſible (en ſuppoſant que l'appliquée B M, qui devient B*m*, augmente) que dans la partie concave, B*t* ſurpaſſe B O, & qu'au contraire elle eſt moindre dans la partie convexe ; de ſorte que ſous le point d'infléxion ou de rebrouſſement F, la valeur de O*t* doit devenir de poſitive négative.

Cela poſé, ſi l'on décrit du centre B (*Fig.* 56. *Pl.* 4.) les petits arcs de cercle M R, T H, on formera les triangles ſemblables *m* R M, M B T, T H O, & les petits ſécteurs ſemblables B M R, B T H. Nommant donc B M, *y* ; M R, *dx* ; l'on aura *m* R (*dy*) . R M (*dx*) : : B M (*y*) . B T $= \frac{ydx}{dy}$: : M R (*dx*) . T H $= \frac{dx^2}{dy}$: : T H ($\frac{dx^2}{dy}$) . HO $= \frac{dx^3}{dy^2}$. Or ſi l'on prend la différence de B T ($\frac{ydx}{dy}$) en ſuppoſant *dx* conſtante, il vient B*t* — B T ou H*t* $= \frac{dxdy^2 - ydxddy}{dy^2}$; & partant O H + H*t* ou O*t* $= \frac{dx^3 + dxdy^2 - ydxddy}{dy^2}$. D'où il ſuit en multipliant par dy^2, & diviſant par *dx*, que la valeur de $dx^2 + dy^2 - yddy$ ſera nulle ou infinie ſous le point d'infléxion ou de rebrouſſement F. Or la nature de la ligne A F K (*Fig.* 54. 55. *Pl.* 4.) étant donnée, l'on aura des valeurs de *dy* en *dx*,

& de ddy en dx^2, lesquelles étant substituées dans $dx^2 + dy^2 - yddy$, formeront une quantité, qui étant égalée d'abord à zero, & ensuite à l'infini, servira à trouver pour BF une valeur telle que décrivant du centre B, & de ce rayon un cercle, il coupera la courbe AFK au point d'infléxion ou de rebroussement F. Ce qui étoit proposé

Pour trouver encore la même chose d'une autre manière, il faut considérer que dans la partie concave, l'angle BmE (*Fig.* 50. 51. *Pl.* 3.) surpasse l'angle Bmn, & qu'au contraire dans la convexe il est moindre; & partant que l'angle BmE - Bmn ou Emn, (*Fig.* 50. *Pl.* 3.) c'est-à-dire, l'arc En qui en est la mesure, devient de positif négatif sous le point cherché F. Or prenant dx pour constante, les triangles rectangles semblables HmS, Hnk, donneront Hm (du) . mS (dx) : : Hn ($-ddy$) . $nk = -\frac{dxddy}{du}$. où l'on doit observer que la valeur de Hn est négative, parce que Bm (y) croissant, Rm (dy) diminue. Mais à cause des secteurs semblables BmS, mEk, l'on aura Bm (y) . mS (dx) : : mE (du) . Ek $= \frac{dxdu}{y}$, & partant Ek + kn ou En $= \frac{dxdu^2 - ydxddy}{ydu}$. D'où il suit en multipliant par ydu, & divisant par dx, que $du^2 - yddy$ ou $dx^2 + dy^2 - yddy$ doit devenir de positive, négative sous le point cherché F. (*Fig.* 54. 55. *Pl.* 4.)

Si l'on suppose que y devienne infinie, les ter-

mes dx^2 & dy^2 seront nuls par rapport au terme $yddy$; & par conséquent la formule $dx^2 + dy^2 - yddy = o$, ou à l'infini, se changera en cette autre $-yddy = o$, ou à l'infini, c'est-à-dire, en divisant par $-y$, $ddy = o$, ou à l'infini, qui est la formule du premier cas. Ce qui doit aussi arriver, puisque les appliquées BM, BF, BM deviennent alors paralleles. (*Consultez la Note quarante-unieme.*)

COROLLAIRE.

67. LORSQUE $ddy = o$, il est clair que la différence de AL (*Fig.* 52. *Pl.* 3.) doit être nulle par rapport à celle de AE; & partant que les deux tangentes infiniment proches FL, fL doivent tomber l'une sur l'autre, en ne faisant qu'une seule ligne droite fFL. Mais lorsque $ddy =$ à l'infini, la différence de AL (*Fig.* 53. *Pl.* 4.) doit être infiniment grande par rapport à celle de AE, ou (ce qui est la même chose) la différence de AE est infiniment petite par rapport à celle de AL; & par conséquent l'on peut mener par le même point F deux tangentes FL, Fl, qui fassent entr'elles un angle infiniment petit, LFl.

De même lorsque $dx^2 + dy^2 - yddy = o$, il est visible que Ot (*Fig.* 56. 57. *Pl.* 4.) doit devenir nulle par rapport à MR; & qu'ainsi les deux tangentes infiniment proches MT, mt, doivent tomber l'une sur l'autre, lorsque le point M devient un point d'infléxion ou de rebroussement : mais au contraire lorsque $dx^2 + dy^2 - yddy =$ à l'infini, Ot doit être infinie par rapport à MR, ou (ce qui

eſt la même choſe) M R infiniment petite par rapport à O t ; & par conſéquent le point m doit tomber ſur le point M, c'eſt-à-dire, qu'on peut mener par le même point M deux tangentes qui faſſent entr'elles un angle infiniment petit, lorſque ce point devient un point d'infléxion ou de rebrouſſement.

Il eſt évident que la tangente au point d'infléxion ou de rebrouſſement F, étant prolongée, touche & coupe la courbe A F K dans ce même point. (*Conſultez la Note quarante-deuxieme.*)

EXEMPLE I.

68. SOIT une ligne courbe AFK (*Fig.* 58. *Pl.* 4.) qui ait pour diamétre la ligne droite A B, & qui ſoit telle que la relation de la coupée A E (x) à l'appliquée E F (y), ſoit exprimée par l'équation $axx = xxy + aay$. Il s'agit de trouver pour A E une valeur, telle que l'appliquée EF rencontre la courbe A F K au point d'infléxion F.

L'équation à la courbe eſt $y = \frac{axx}{xx + aa}$; & partant $dy = \frac{2a^3xdx}{\overline{xx + aa}^2}$, & prenant la différence de cette quantité, en ſuppoſant dx conſtante, & l'égalant enſuite à zero, on trouve $\frac{2a^3dx^2 \times \overline{xx + aa}^2 - 8a^3xxdx^2 \times \overline{xx + aa}}{\overline{xx + aa}^4} = o$; ce qui multiplié par $\overline{xx + aa}^4$, & diviſé par $2a^3dx^2 \times \overline{xx + aa}$, donne $xx + aa - 4xx = o$, d'où l'on tire A E (x) $= a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Si l'on met à la place de xx ſa valeur $\frac{1}{3}aa$ dans l'équation à la courbe $y = \frac{axx}{xx + aa}$, on trouve EF (y) $= \frac{1}{4}a$; de ſorte qu'on peut déterminer le point d'inflexion F, ſans ſuppoſer que la courbe AFK ſoit décrite.

Si l'on mene AC parallele aux appliquées EF, & égale à la droite donnée a, & qu'on tire CG parallele à AB, elle ſera aſymptote de la courbe AFK. Car ſi l'on ſuppoſe x infinie, on pourra prendre xx pour $xx + aa$; & partant l'équation à la courbe $y = \frac{axx}{xx + aa}$ ſe changera en celle-ci $y = a$. (*Conſultez la Note quarante-troiſieme.*)

EXEMPLE II.

69. SOIT $y - a = \overline{x - a}^{\frac{3}{5}}$. Donc $dy = \frac{3}{5}\overline{x - a}^{-\frac{2}{5}}dx$, & $ddy = -\frac{6}{25}\overline{x - a}^{-\frac{7}{5}}dx^2 = \frac{-6dx^2}{25\sqrt[5]{\overline{x - a}^7}}$, en prenant dx pour conſtante. Or ſi l'on ſuppoſe cette fraction égale à zero, on trouve $-6dx^2 = o$; ce qui ne faiſant rien connoître, il la faut ſuppoſer infiniment grande ; & par conſéquent ſon dénominateur $25\sqrt[5]{\overline{x - a}^7}$ infiniment petit ou zero. D'où l'inconnue AE (x) $= a$. (*Conſultez la Note quarante-quatrieme.*)

EXEMPLE III.

70. SOIT une demi roulette allongée AFK (*Fig.* 59. *Pl.* 4.) dont la baſe BK ſurpaſſe la demi-circonférence ADB du cercle générateur qui a pour centre le point C. Il s'agit de déterminer ſur le diamétre AB, le point E, enſorte que l'appliquée EF aille rencontrer la roulette au point d'infléxion F.

Ayant nommé les connues ADB, a; BK, b; AB, $2c$; & les inconnues AE, x; ED, z; l'arc AD, u; EF, y; l'on aura par la proprieté de la roulette $y = z + \frac{bu}{a}$; & partant $dy = dz + \frac{bdu}{a}$. Or par la proprieté du cercle l'on aura $z = \sqrt{2cx - xx}$, $dz = \frac{cdx - xdx}{\sqrt{2cx - xx}}$, & $du (\sqrt{dx^2 + dz^2}) = \frac{cdx}{\sqrt{2cx - xx}}$. Donc mettant pour dz & du leurs valeurs, on trouve $dy = \frac{acdx - axdx + bcdx}{a\sqrt{2cx - xx}}$, dont la différence (en prenant dx pour conſtante) donne $\frac{bcx - acc - bcc \times dx^2}{2cx - xx \times \sqrt{2cx - xx}} = 0$; d'où l'on tire

$$AE(x) = c + \frac{ac}{b}, \text{ \& } CE = \frac{ac}{b}.$$

Il eſt clair qu'afin qu'il y ait un point d'infléxion F, il faut que b ſurpaſſe a; car s'il étoit moindre, CE ſurpaſſeroit CB. (*Conſultez la Note quarante-cinquieme.*)

EXEMPLE IV.

71. On demande le point d'infléxion F (*Fig.* 60. *Pl.* 4.) de la Conchoïde A F K de *Nicomede*, laquelle a pour pole le point P, & pour aſymptote la droite B C. Sa propriété eſt telle, qu'ayant mené du pole P à un de ſes points quelconques F la droite P F, qui rencontre l'aſymptote B C en D; la partie D F eſt toujours égale à une même droite donnée a.

Ayant mené P A perpendiculaire, & F E parallele à B C, on nommera les connues A B ou F D, a; B P, b; & les inconnues B E, x; E F, y; & tirant D L parallele à B A, les triangles ſemblables D L F, P E F donneront D L (x). L F $(\sqrt{aa-xx})$: : P E $(b+x)$. E F (y) $= \frac{\overline{b+x}\sqrt{aa-xx}}{x}$. dont la différence eſt $dy = \frac{x^3dx+aabdx}{xx\sqrt{aa-xx}}$. Si donc on prend la différence de cette quantité, & qu'on l'égale à zero, on formera l'égalité $\frac{\overline{2a^4b-aax^3-3aabxx}\times dx^2}{\overline{aax^3-x^5}\times\sqrt{aa-xx}} = 0$, qui ſe réduit à $x^3+3bxx-2aab=0$, dont l'une des racines fournit pour B E la valeur cherchée.

Si $a=b$, l'équation précédente ſe changera en cette autre $x^3+3axx-2a^3=0$, laquelle étant diviſée par $x+a$, donne $xx+2ax-2aa=0$; & partant B E $(x) = -a+\sqrt{3aa}$.

Autrement.

En prenant pour appliquées les lignes P F qui partent du pole P, & en se servant de la formule (*Art.* 66.) $yddy = dx^2 + dy^2$, dans laquelle dx a été supposée constante. Ayant imaginé une autre appliquée Pf qui fasse avec PF l'angle FPf infiniment petit, & décrit du centre P les petits arcs FG, DH, on nommera les connues AB, a; BP, b; & les inconnues PF, y; PD, z; & l'on aura par la propriété de la conchoïde $y = z + a$, ce qui donne $dy = dz$. Or à cause du triangle rectangle DBP, DB $= \sqrt{zz - bb}$; & à cause des triangles semblables DBP & dHD, PDH & PFG, l'on aura DB $(\sqrt{zz - bb})$. BP (b) : : dH (dz). HD $= \frac{bdz}{\sqrt{zz - bb}}$. Et PD (z). PF $(z + a)$: : HD $\left(\frac{bdz}{\sqrt{zz - bb}}\right)$. FG $(dx) = \frac{bzdz + abdz}{z\sqrt{zz - bb}}$. D'où l'on tire dz ou $dy = \frac{zdx\sqrt{zz - bb}}{bz + ab}$, dont la différence est (en supposant dx constante) $ddy =$

$$\frac{\overline{bz^3 + 2abzz - ab^3} \times dzdx}{\overline{bz + ab}^2 \sqrt{zz - bb}} = \frac{\overline{bz^4 + 2abz^3 - ab^3z} \times dx^2}{\overline{bz + ab}^3}$$

en mettant pour dz sa valeur. Donc si l'on substitue dans la formule générale (*Art.* 66.) $yddy = dx^2 + dy^2$ à la place de y sa valeur $z + a$, & de dy & ddy les valeurs que l'on vient de trouver en dx & dx^2; on formera cette équation

$$\frac{\overline{z^4 + 2az^3 - abbz} \times dx^2}{\overline{bz + ab^2}} = \frac{\overline{z^4 + 2abbz + aabb} \times dx^2}{\overline{bz + ab^2}}$$

qui se réduit à $2z^3 - 3bbz - abb = o$, dont l'une des racines augmentée de a fournit la valeur de l'inconnue PF.

Si $a = b$, l'on aura $2z^3 - 3aaz - a^3 = o$, qui étant divisée par par $z + a$, donne $zz - az - \frac{aa}{2} = o$, dont la résolution fournit PF $(z + a) = \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}a\sqrt{3} = \frac{3a + a\sqrt{3}}{2}$. (*Consultez la Note* 46.)

EXEMPLE V.

72. Soit une autre espece de Conchoïde AFK, (*Fig.* 60. *Pl.* 4.) telle qu'ayant mené d'un de ses points quelconques F au pole P la droite PF qui coupe l'asymptote BC en D, le rectangle PD × DF soit toujours égal au même rectangle PB × BA. On demande le point d'infléxion F.

Si l'on nomme les inconnues BE, x; EF, y; & les connues AB, a; BP, b; on aura PD × DF $= ab$; & les paralleles BD, EF donneront PD × DF (ab). PB × BE (bx) : : $\overline{PF}^2$ $(bb + 2bx + xx + yy)$. $\overline{PE}^2$ $(bb + 2bx + xx)$. Donc $bbx + 2bxx + x^3 + yyx = abb + 2abx + axx$, ou $yy = \frac{abb + 2abx + axx - bbx - 2bxx - x^3}{x}$, &

$y = \overline{b + x}\sqrt{\frac{a - x}{x}} = \sqrt{ax - xx} + b\sqrt{\frac{a - x}{x}}$, dont

la différence donne $dy = \frac{-axdx + 2xxdx + abdx}{2x\sqrt{ax - xx}}$;

& prenant encore la différence, on forme l'égalité $\frac{\overline{3aab - aax - 4abx} \times dx^2}{\overline{4ax - 4x^2} \times \sqrt{ax - x^2}} = o$, qui se réduit à $x = \frac{3ab}{a + 4b}$ valeur de l'inconnue BE.

Si l'on fait $\frac{-axdx + 2xxdx + abdx}{2x\sqrt{ax - xx}}$ valeur de dy égal à zero, l'on aura $xx - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ab = o$, dont les deux racines $\frac{a + \sqrt{aa - 8ab}}{4}$ & $\frac{a - \sqrt{aa - 8ab}}{4}$ fournissent, lorsque a surpasse $8b$, deux valeurs BH & BL, telles que l'appliquée HM (*Fig.* 61. *Pl.* 4.) est moindre que ses voisines, & l'appliquée LN plus grande, c'est-à-dire, que les tangentes en M & N seront paralleles à l'axe AB; & alors le point E tombera entre les points H & L.

Mais lorsque $a = 8b$, les lignes BH, BE, BL (*Fig.* 62. *Pl.* 4.) seront égales chacune à $\frac{1}{4}a$; & alors la tangente au point d'infléxion F sera parallele à l'axe AB. Et enfin lorsque a est moindre que $8b$, les deux racines seront imaginaires; & par conséquent il n'y aura aucune tangente qui puisse être parallele à l'axe.

On pourroit encore résoudre cette question en prenant pour appliquées les lignes PF, Pf, (*Fig.* 60. *Pl.* 4.) qui partent du pole P, & en se servant de la formule $yddy = dx^2 + dy^2$, comme l'on a fait dans l'exemple précédent. (*Consultez la Note* 47.)

EXEMPLE

EXEMPLE VI.

73. Soit un cercle AED (*Fig.* 63. *Pl.* 4.) qui ait pour centre le point B, avec une ligne courbe AFK, telle qu'ayant mené à discrétion le rayon BFE, le quarré de FE soit égal au rectangle de l'arc AE par une droite donnée b. Il faut déterminer dans cette courbe le point d'infléxion F.

Ayant nommé l'arc AE, z; le rayon BA ou BE, a; & l'appliquée BF, y; on aura $bz = aa - 2ay + yy$, & (en prenant les différences) $\frac{2ydy - 2ady}{b} = dz = Ee$. Or à cause des secteurs semblables BEe, BFG, on fera BE (a). BF (y) :: Ee ($\frac{2ydy - 2ady}{b}$). FG (dx) $= \frac{2yydy - 2aydy}{ab}$. dont la différence, en supposant dx constante, donne $4ydy^2 - 2ady^2 + 2yyddy - 2ayddy = 0$; & partant $yddy = \frac{ady^2 - 2ydy^2}{y - a}$. Si donc on substitue à la place de dx^2 & $yddy$ leurs valeurs en dy^2 dans la formule générale (*Art.* 66.) $yddy = dx^2 + dy^2$, on formera l'équation $\frac{ady^2 - 2ydy^2}{y - a} = \frac{4y^4dy^2 - 8ay^3dy^2 + 4aayydy^2 + aabbdy^2}{aabb}$ qui se réduit à $4y^5 - 12ay^4 + 12aay^3 - 4a^3yy + 3aabby - 2a^3bb = 0$, dont la résolution fournira pour BF la valeur cherchée.

Il est évident que la courbe AFK, que l'on peut appeller une *Spirale parabolique*, doit avoir

un point d'infléxion F. Car la circonférence AED ne différant pas d'abord ſenſiblement de la tangente en A, il ſuit de la nature de la parabole qu'elle doit d'abord être concave vers cette tangente, & qu'enſuite la courbure de la circonférence autour de ſon centre devenant ſenſible, elle doit devenir concave vers le centre. (*Conſultez la Note quarante-huitieme.*)

EXEMPLE VII.

74 SOIT une ligne courbe AFK (*Fig.* 64. *Pl.* 4) qui ait pour axe la droite AB, dont la proprieté ſoit telle qu'ayant mené une tangente quelconque FB qui rencontre AB au point B, la partie interceptée AB ſoit toujours à la tangente BF en raiſon donnée de m à n. Il eſt queſtion de déterminer le point de rebrouſſement F.

Ayant nommé les inconnues & variables AE, x; EF, y; l'on aura $EB = -\frac{ydx}{dy}$ (parce que x croiſſant, y diminue), $FB = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$. Or par la proprieté de la courbe, AE + EB ou AB $\left(\frac{xdy - ydx}{dy}\right) . BF \left(\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}\right) :: m . n.$ Donc $m\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{nxdy}{y} - ndx$, & ſa différence donne $\frac{mdyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{-nydxdy + nxyddy - nxdy^2}{yy}$ en ſuppoſant dx conſtante & négative; d'où l'on tire $ddy = \frac{-nydxdy - nxdy^2\sqrt{dx^2 + dy^2}}{myydy - nxy\sqrt{dx^2 + dy^2}}$. Maintenant

ſi l'on fait cette fraction égale à zero, on trouvera $-ydx - xdy = o$; ce qui ne fait rien connoître. C'eſt pourquoi il faut ſuppoſer cette fraction égale à l'infini, c'eſt-à-dire, ſon dénominateur égal à zero; ce qui donne $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{mydy}{nx} = \frac{nxdy - nydx}{my}$ à cauſe de l'équation à la courbe, d'où l'on tire $dx = \frac{nnxxdy - mmyydy}{nnxy}$. Or quarrant chaque membre de l'équation $mydy = nx\sqrt{dx^2 + dy^2}$, on trouve encore $dx = \frac{dy\sqrt{mmyy - nnxx}}{nx} = \frac{nnxxdy - mmyydy}{nnxy}$. d'où l'on tire enfin $y\sqrt{mm - nn} = nx$; ce qui donne cette conſtruction.

Soit décrit du diametre $AD = m$, un demi-cercle AID; & ayant pris la corde $DI = n$, ſoit tirée l'indéfinie AI. Je dis qu'elle rencontrera la courbe AFK au point de rebrouſſement F.

Car ayant mené IH perpendiculaire à AB, les triangles rectangles ſemblables DIA, IHA, FEA donneront DI (n). IA ($\sqrt{mm - nn}$) :: IH. HA :: FE (y). EA (x). & partant $y\sqrt{mm - nn} = nx$ qui étoit le lieu à conſtruire.

Il eſt clair que BF eſt parallele à DI, puiſque AB. BF :: AD (m). DI (n). d'où il ſuit que l'angle AFB eſt droit; & partant que les lignes AB, BF, BE ſont en proportion continue.

On peut trouver cette même proprieté ſans aucun calcul, ſi l'on imagine (*Art.* 67.) au même point de rebrouſſement F deux tangentes FB, F*b*

qui faſſent entr'elles un angle B Fb infiniment petit. Car décrivant du centre F le petit arc B L, on aura $m \,.\, n :: Ab \,.\, bF :: AB \,.\, BF :: Ab - AB$ ou $Bb \,.\, bF - BF$ ou $bL :: BF \,.\, BE$. à cauſe des triangles rectangles ſemblables BbL, FBE. Donc; &c.

Si $m = n$, il eſt évident que la droite A F deviendra perpendiculaire ſur l'axe A B; & qu'ainſi la tangente F B ſera parallele à cet axe; ce que l'on ſçait d'ailleurs devoir arriver, puiſqu'en ce cas la courbe A F doit être un demi-cercle qui ait ſon diametre perpendiculaire ſur l'axe A B. Mais ſi m étoit moindre que n, il eſt évident qu'il n'y auroit aucun point de rebrouſſement, parce qu'alors l'équation $y\sqrt{mm - nn} = nx$ renfermeroit une contradiction. (*Conſultez la Note quarante-neuvieme.*)



SECTION V.

Usage du calcul des différences pour trouver les Dévelopées.

DÉFINITION.

SI l'on conçoit qu'une ligne courbe quelconque DBF (*Fig.* 65. *Pl.* 4.) concave vers le même côté, soit enveloppée ou entourée d'un fil ABDF, dont l'une des extrêmités soit fixe en F, & l'autre soit tendue le long de la tangente BA, & que l'on fasse mouvoir l'extrêmité A en la tenant toujours tendue & en développant continuellement la courbe BDF ; il est clair que l'extrémité A de ce fil décrira dans ce mouvement une ligne courbe AHK.

Cela posé, la courbe BDF sera nommée la *Dévelopée* de la courbe AHK.

Les parties droites AB, HD, KF du fil ABDF seront nommées les *rayons de la dévelopée.*

COROLLAIRE I.

75. DE ce que la longueur du fil ABDF demeure toujours la même, il suit que la portion de courbe BD est égale à la différence des rayons DH, BA qui partent de ses extrêmités ; de même la portion DF sera égale à la différence des rayons FK, DH ; & la courbe entiére BDF à la différence des rayons FK, BA. D'où l'on voit que si

le rayon B A de la courbe étoit nul, c'eſt-à-dire, que ſi l'extrêmité A du fil tomboit ſur l'origine B de la courbe B D F, alors les rayons de la dévelopée D H, F K ſeroient égaux aux portions B D, B D F de la courbe B D F.

COROLLAIRE II.

76. SI l'on conſidére la courbe B D F (*Fig. 66. Pl. 4*) comme un poligone B C D E F d'une infinité de côtés; il eſt clair que l'extrêmité A du fil A B C D E F décrit le petit arc A G qui a pour centre le point C, juſqu'à ce que le rayon C G ne faſſe plus qu'une ligne droite avec le petit côté C D voiſin de C B; & de même qu'elle décrit le petit arc G H qui a pour centre le point D, juſqu'à ce que le rayon D H ne faſſe plus qu'une droite avec le petit côté D E; & ainſi de ſuite juſqu'à ce que la courbe B C D E F ſoit entiérement développée. La courbe AHK peut être donc conſidérée comme l'aſſemblage d'une infinité de petits arcs de cercle A G, G H, H I, I K, &c. qui ont pour centre les points C, D, E, F, &c. D'où il ſuit.

1°. Que les rayons de la dévelopée la touchent continuellement comme D H en D, K F en F, &c. Et qu'ils ſont tous perpendiculaires à la courbe A H K qu'ils décrivent, comme D H en H, FK en K, &c. Car D H, par exemple, eſt perpendiculaire ſur le petit arc G H & ſur le petit arc H I, puiſqu'elle paſſe par leurs centres D, E. D'où l'on voit, 1°. que la dévelopée B D F (*Fig.*

65. *Pl.* 4) termine l'eſpace où tombent toutes les perpendiculaires à la courbe AHK. 2°. Que ſi l'on prolonge un rayon quelconque HD qui coupe le rayon AB en R, juſqu'à ce qu'il rencontre un autre rayon quelconque KF en S, l'on pourra toujours mener de tous les points de la partie RS deux perpendiculaires ſur la courbe AHK, excepté du point touchant D duquel on n'en peut mener qu'une ſeule, ſçavoir DH. Car il eſt clair que l'interſection R des rayons AB, DH parcourt tous les points de la partie RS, pendant que le rayon AB décrit par ſon extrêmité A la ligne AHK ſur laquelle il eſt continuellement perpendiculaire: & que les rayons AB, HD ne ſe confondent que lorſque l'interſection R tombe ſur le point touchant D.

2°. Que ſi l'on prolonge les petits arcs HG (*Fig.* 66. *Pl.* 4.) en *l*, IH en *m*, KI en *n*, &c. vers l'origine A du dévelopement, chaque petit arc comme IH touchera en dehors ſon voiſin HG, parce que les rayons CA, DG, EH, FI vont toujours en augmentant, à meſure que les petits arcs qui compoſent la courbe AHK, s'éloignent du point A. Par la même raiſon ſi l'on prolonge les petits arcs AG en *o*, GH en *p*, HI en *q*, vers le côté oppoſé au point A; chaque petit arc comme HI touchera en deſſous ſon voiſin IK. Or puiſque les points H & I, D & E peuvent être conſidérés comme tombant l'un ſur l'autre à cauſe de l'infinie petiteſſe tant de l'arc HI, que du côté DE; il s'enſuit que ſi l'on décrit d'un

point quelconque moyen D de la dévelopée BDF comme centre, & de ſon rayon DH un cercle *mHp*, il touchera en dehors la partie HA qui tombera toute entiere au dedans de ce cercle, & en dedans l'autre partie HK qui tombera toute entiére au dehors de ce même cercle : c'eſt-à-dire, qu'il touchera & coupera la courbe AHK au même point H, de même que la tangente au point d'infléxion coupe la courbe dans ce point.

3°. Le rayon HD du petit arc HG, ne différant des rayons CG, EH des arcs voiſins GA, HI, que d'une quantité infiniment petite CD ou DE; il s'enſuit que pour peu qu'on diminue le rayon DH, il ſera moindre que CG, & qu'ainſi ſon cercle touchera en deſſous la partie HA ; & qu'au contraire pour peu qu'on l'augmente, il ſurpaſſera HE, & qu'ainſi ſon cercle touchera en dehors la partie HK : de ſorte que le cercle *mHp* eſt le plus petit de tous ceux qui touchent en dehors la partie HA, & au contraire le plus grand de tous ceux qui touchent en dedans la partie HK : c'eſt-à-dire, qu'entre ce cercle & la courbe on n'en peut faire paſſer aucun autre.

4°. Comme la courbure des cercles augmente à proportion que leurs rayons diminuent, il s'enſuit que la courbure du petit arc HI ſera à la courbure du petit arc AG réciproquement comme le rayon BA ou CA de ce dernier eſt à ſon rayon DH ou EH : c'eſt-à-dire, que la courbure en H de la courbe AHK ſera à ſa courbure en A, comme le rayon BA au rayon DH; & de même que la

courbure en K eſt à la courbure en H, comme le rayon DH eſt au rayon FK. D'où l'on voit que la courbure de la ligne AHK diminue continuellement à meſure que la ligne BDF ſe développe; de ſorte qu'au point A, où commence le dévelopement, elle eſt la plus grande qu'il eſt poſſible; & au point K, où je ſuppoſe qu'il ceſſe, la plus petite

5°. Que les points de la dévelopée ne ſont autre choſe que le concours des perpendiculaires menées par les extrêmités des petits arcs qui compoſent la courbe AHK. Par exemple, le point D où E eſt le concours des perpendiculaires HD, IE du petit arc HI; de ſorte que ſi la courbe AHK eſt donnée avec la poſition d'une de ſes perpendiculaires HD, pour trouver le point D ou E, où elle touche la dévelopée, il ne faut que chercher le point de concours des perpendiculaires infiniment proches HD, IE: c'eſt ce qu'on va enſeigner dans le Problême qui ſuit.

PROPOSITION I.

Problême Général.

77. La *nature de la ligne courbe* AMD (*Fig.* 67. *Pl* 4.) *étant donnée avec une de ſes perpendiculaires quelconque* MC; *déterminer la longueur du rayon* MC *de ſa dévelopée, c'eſt-à-dire, le concours des perpendiculaires infiniment proches* MC, mC.

Suppoſons en premier lieu que la ligne courbe AMD ait pour axe la ligne droite AB ſur laquelle les appliquées PM ſoient perpendiculaires.

On imaginera une autre appliquée mp, qui ſera infiniment proche de M P, puiſque le point m eſt ſuppoſé infiniment près de M. On menera par le point de concours C une parallele CE à l'axe A B, laquelle rencontre les appliquées M P, mp aux points E, e. Enfin menant M R parallele à AB, on formera les triangles rectangles ſemblables M R m, M E C; car les angles E M R, C Mm étant droits, & l'angle C M R leur étant commun, l'angle E M C ſera égal à l'angle RMm.

Si donc l'on nomme les données A P, x; PM, y; l'inconnue M E, z; l'on aura Ee ou Pp ou M R $= dx$, R$m = dy = dz$, M$m = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; & M R (dx). Mm ($\sqrt{dx^2 + dy^2}$) : : M E (z). M C $= \frac{z\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$. Or le point C étant le centre du petit arc Mm, ſon rayon C M qui devient Cm lorſque E M augmente de ſa différence R m, demeure le même. Sa différence ſera donc nulle : ce qui donne (en ſuppoſant dx conſtante) $\frac{dzdx^2 + dzdy^2 + zdyddy}{dx\sqrt{dx^2 + dy^2}} = o$; d'où l'on tire M E

(z) $= \frac{dzdx^2 + dzdy^2}{-dyddy} = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$ en mettant pour dz ſa valeur dy.

Suppoſons en ſecond lieu que les appliquées B M, Bm (*Fig.* 68. *Pl.* 4.) partent toutes d'un même point B. Ayant mené du point cherché C ſur les appliquées, que je ſuppoſe infiniment proches, les perpendiculaires C E, Ce, & décrit du centre B le petit arc M R; on formera les trian-

gles rectangles semblables R M m & E M C, B M R, B E G & C e G. C'est pourquoi nommant B M, y; M E, z; M R, dx; on aura R$m = dy$, M$m = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, C E ou Ce $= \frac{zdy}{dx}$, & M C $= \frac{z\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$. On trouvera ensuite, comme dans le premier cas, $z = \frac{dzdx^2 + dzdy^2}{-dyddy}$. Or B M ($y$). C$e$ $\left(\frac{zdy}{dx}\right)$: : M R (dx). G$e = \frac{zdy}{y}$. & me — M E ou Rm — Ge $= dz = \frac{ydy - zdy}{y}$. Donc en mettant cette valeur à la place de dz, l'on aura M E (z) $= \frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + dy^2 - yddy}$.

Si l'on suppose que y soit infinie, les termes dx^2 & dy^2 seront nuls par rapport à $yddy$; & par conséquent cette derniere formule se changera en celle du cas précédent. Ce qui doit aussi arriver; puisque les appliquées deviennent alors paralleles entr'elles, & que l'arc M R devient une droite perpendiculaire sur les appliquées.

Maintenant la nature de la courbe A M D étant donnée, on trouvera des valeurs de dy^2 & ddy en dx^2, ou de dx^2 & ddy en dy^2, lesquelles étant substituées dans les formules précédentes, donneront pour M E une valeur délivrée des différences, & entierement connue. Et menant E C perpendiculaire sur M E, elle ira couper M C

perpendiculaire à la courbe, au point cherché C. Ce qui étoit proposé.

COROLLAIRE I.

78. A cause des triangles rectangles semblables MRm & MEC, (*Fig.* 67. 68. *Pl.* 4.) l'on aura dans le premier cas $MC = \frac{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxddy}$, & dans le second cas $MC = \frac{\overline{ydx^2 + ydy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx^3 + dxdy^2 - ydxddy}$.

REMARQUE.

79. IL y a encore plusieurs autres maniéres de trouver les rayons de la développée. J'en mettrai ici une partie, afin de donner différentes ouvertures à ceux qui ne possedent pas encore ce calcul.

Premier cas pour les courbes dont les appliquées sont perpendiculaires à l'axe.

Premiere manière. Soit prolongée MR en G où elle rencontre la perpendiculaire mC. (*Fig.* 67. *Pl.* 4.) Les angles droits MRm, MmG donneront $RG = \frac{dy^2}{dx}$; & par conséquent $MG = \frac{dx^2 + dy^2}{dx}$. Or à cause des triangles semblables MRm, MPQ (les points Q, q marquent les intersections des perpendiculaires infiniment proches MC, mC avec l'axe AB) il vient $MQ = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$, $PQ = \frac{ydy}{dx}$; & partant $AQ = x$

$+\frac{ydy}{dx}$, dont la différence donne (en prenant dx pour conſtante) $Qq = dx + \frac{dy^2 + yddy}{dx}$; & à cauſe des triangles ſemblables CMG, CQq, l'on aura $MG - Qq \left(\frac{-yddy}{dx}\right) . MG \left(\frac{dx^2 + dy^2}{dx}\right) :: MQ \left(\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}\right) . MC = \frac{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxddy}$.

Seconde manière. Ayant décrit du centre C le petit arc Q O, les petits triangles rectangles QOq, MRm ſeront ſemblables, puiſque Mm, QO & MR, Qq ſont paralleles; & partant Mm $(\sqrt{dx^2 + dy^2}) . MR (dx) :: Qq \left(\frac{dx^2 + dy^2 + yddy}{dx}\right) . QO = \frac{dx^2 + dy^2 + yddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$. Or les ſecteurs ſemblables CMm, CQO donnent $Mm - QO \left(\frac{-yddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}\right) . Mm (\sqrt{dx^2 + dy^2}) . :: MQ \left(\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}\right) . MC = \frac{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxddy}$.

Troiſieme manière. Menant les tangentes infiniment proches MT, mt, on aura PT — AP ou $AT = \frac{ydx}{dy} - x$, dont la différence donne $Tt = -\frac{ydxddy}{dy^2}$; & décrivant du centre m le petit arc TF, on formera le triangle rectangle FTt ſemblable à RmM, car les angles FtT, RMm ou PTM ſont égaux, ne différant entr'eux que

de l'angle T mt qui eſt infiniment petit ; ce qui donne Mm ($\sqrt{dx^2+dy^2}$). mR (dy) : : Tt ($-\frac{ydxddy}{dy^2}$). TF $= \frac{-ydxddy}{dy\sqrt{dx^2+dy^2}}$. Or les ſecteurs T$mF, MCm$ ſont ſemblables, car l'angle Tmt + MmC vaut un droit, & l'angle MmC + MCm vaut auſſi un droit à cauſe du triangle CMm conſideré comme rectangle en M. Donc TF ($-\frac{ydxddy}{dy\sqrt{dx^2+dy^2}}$). M$m$ ($\sqrt{dx^2+dy^2}$) : : Tm ou TM ($\frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy}$). MC $= \frac{\overline{dx^2+dy^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dxddy}$.

Quatrieme manière. On marquera (*Art.* 64.) les différences ſecondes en prenant dx pour conſtante ; & les triangles rectangles ſemblables HmS, Hnk (*Fig.* 69. *Pl.* 4.) donneront Hm ou Mm ($\sqrt{dx^2+dy^2}$). mS ou MR (dx) : : Hn ($-ddy$). $nk = -\frac{dxddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$. Or l'angle kmn eſt égal à celui que font entr'elles les tangentes aux points M, m ; & partant comme l'on vient de prouver, égal à l'angle MCm ; d'où il ſuit que les ſecteurs nmk, MCm ſont ſemblables, & qu'ainſi nk ($-\frac{dxddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$). mk ou (*Art.* 2.) Mm ($\sqrt{dx^2+dy^2}$) : : Mm ($\sqrt{dx^2+dy^2}$). MC $= \frac{\overline{dx^2+dy^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dxddy}$. On prend mH ou Mm pour mk, parce qu'elles ne diffèrent entr'elles que de la petite droite Hk infiniment moindre qu'elles ; de même que Hn eſt infiniment moindre que Rm ou Sn.

Second cas pour les courbes dont les appliquées partent d'un même point fixe.

Premiere manière. Ayant mené du point fixe B (*Fig.* 68. *Pl.* 4.) les perpendiculaires BF, B*f* sur les rayons infiniment proches CM, C*m*; les triangles rectangles *m*MR, BMF, qui sont semblables (puisqu'ajoutant aux angles *m*MR, BMF le même angle FMR, ils composent chacun un angle droit), donneront MF ou MH $= \frac{ydx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, & BF $= \frac{ydy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, dont la différence (en prenant *dx* pour constante) est B*f* − BF ou H*f* $= \frac{dx^2dy^2 + dy^4 + ydx^2ddy}{\overline{dx^2 + dy^2} \times \sqrt{dx^2 + dy^2}}$. Or à cause des secteurs semblables CM*m*, CH*f*, on forme cette proportion M*m* — H*f*. M*m* : : MH. MC, & partant MC $= \frac{\overline{ydx^2 + ydy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx^3 + dxdy^2 - ydxddy}$.

Seconde manière. On marquera (*Art.* 64.) les différences secondes en supposant *dx* constante; & les secteurs semblables B*m*S, *m*E*k* (*Fig.* 70. *Pl.* 4.) donneront B*m* (y). *m*S (dx) : : *m*E ($\sqrt{dx^2 + dy^2}$). E*k* $= \frac{dx\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$. Or à cause des triangles rectangles semblables H*m*S, H*nk*, l'on aura H*m* ou M*m* ($\sqrt{dx^2 + dy^2}$). *m*S ou MR (dx) : : H*n* ($-ddy$). *nk* $= -\frac{dxddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$. Et partant E*n* $= \frac{dx^3 + dxdy^2 - ydxddy}{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}$; & prenant

une troisieme proportionnelle à E*n*, E*m* ou M*m*, les secteurs semblables E*mn*, MC*m* donneront pour MC la même valeur qu'auparavant.

Si l'on nomme M*m* ($\sqrt{dx^2 + dy^2}$), *du*; & qu'on prenne *dy* pour constante, au lieu de *dx*, on trouvera dans le premier cas MC $= \frac{du^3}{dyddx}$, & dans le second MC $= \frac{ydu^3}{dxdu^2 + ydyddx}$. Et enfin si l'on prend *du* pour constante, il vient dans le premier cas MC $= \frac{dxdu}{-ddy}$ ou $\frac{dydu}{ddx}$ (parce que la différence de $dx^2 + dy^2 = du^2$ est $dxddx + dyddy = o$, & qu'ainsi $\frac{dx}{-ddy} = \frac{dy}{ddx}$); & dans le second, MC $= \frac{ydxdu}{dx^2 - yddy}$ ou $\frac{ydydu}{dxdy + yddx}$.

COROLLAIRE. II.

80. COMME l'on ne trouve pour ME ou MC (*Fig.* 72. *Pl* 4.) qu'une seule valeur, il s'ensuit qu'une ligne courbe AMD ne peut avoir qu'une seule dévelopée BCG.

COROLLAIRE III.

81. SI la valeur de ME (*Fig.* 67. 68. *Pl.* 4.) $\left(\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}\right)$ ou $\left(\frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + dy^2 - yddy}\right)$ est positive, il faudra prendre le point E du même côté de l'axe AB ou du point B, comme l'on a supposé en faisant le calcul; d'où l'on voit que la courbe sera alors concave vers cet axe ou ce point. Mais si

si la valeur de ME est négative, il faudra prendre le point E du côté opposé ; d'où l'on voit que la courbe sera alors convexe. De sorte qu'au point d'infléxion ou de rebroussement qui sépare la partie concave de la convexe, la valeur de ME doit devenir de positive négative ; & partant les perpendiculaires infiniment proches ou contigues doivent devenir de convergentes divergentes. Or cela ne se peut faire qu'en deux maniéres. Car ou elles vont en croissant, à mesure qu'elles approchent du point d'infléxion ou de rebroussement ; & il faudra pour lors qu'elles deviennent paralleles, c'est-à-dire, que le rayon de la développée soit infini : ou elles vont en diminuant ; & il faudra nécessairement alors qu'elles tombent l'une sur l'autre, c'est-à-dire, que le rayon de la développée soit zero. Tout ceci s'accorde parfaitement avec ce que l'on a démontré dans la séction précédente.

REMARQUE.

82. COMME l'on a cru jusqu'ici que le rayon de la développée étoit toujours infiniment grand au point d'infléxion, il est à propos de faire voir qu'il y a, pour ainsi dire, une infinité de genres de courbes qui ont toutes dans leur point d'infléxion le rayon de la développée égal à zero ; au lieu qu'il n'y en a qu'un seul genre dans lequel ce rayon soit infini.

Soit BAC (*Fig.* 71. *Pl.* 4.) une des courbes qui ont dans leur point d'infléxion A le rayon de la développée infini. Si l'on développe les parties

BA, AC, en commençant au point A; il eſt clair qu'on formera une ligne courbe DAE qui aura auſſi un point d'infléxion dans le même point A, mais dont le rayon de la développée en ce point ſera égal à zero. Et ſi l'on formoit de la même ſorte une troiſiéme courbe par le dévelopement de la ſeconde DAE, & une quatriéme par le dévelopement de la troiſiéme, & ainſi de ſuite à l'infini; il eſt clair que le rayon de la développée dans le point d'infléxion A de toutes ces courbes, ſeroit toujours égal à zero. Donc &c.

PROPOSITION II.

PROBLÉME.

83. TROUVER *dans les courbes* AMD, (*Fig.* 72. *Pl.* 4.) *où l'axe* AB *fait avec la tangente en* A *un angle droit, le point* B *où cet axe touche la développée* BCG.

Si l'on ſuppoſe que le point M devienne infiniment près du ſommet A, il eſt clair que la perpendiculaire MQ rencontrera l'axe au point cherché B; d'où il ſuit que ſi l'on cherche en général la valeur de PQ ($\frac{ydy}{dx}$) en x ou en y, & qu'on faſſe enſuite x ou $y = o$, on déterminera le point P à tomber ſur le point A, & le point Q ſur le point cherché B; c'eſt-à-dire, que PQ deviendra alors égale à la cherchée AB. Ceci s'éclaircira par les exemples qui ſuivent.

EXEMPLE I.

84. SOIT la courbe AMD (*Fig. 72. Pl. 4.*) une Parabole qui ait pour parametre la droite donnée a. L'équation à la parabole est $ax = yy$, dont la différence donne $dy = \frac{adx}{2y} = \frac{adx}{2\sqrt{ax}}$; & prenant la différence de cette derniere équation, en supposant dx constante, on trouve $ddy = \frac{-adx^2}{4x\sqrt{ax}}$. Substituant enfin ces valeurs à la place de dy & de ddy dans la formule $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, on aura (*Art. 77.*) $ME = \frac{\overline{a + 4x\sqrt{ax}}}{a} = \sqrt{ax} + \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$. Ce qui donne cette construction.

Soit menée par le point T où la tangente MT rencontre l'axe, la ligne TE parallele à MC; je dis qu'elle rencontre MP prolongée au point cherché E. Car les angles droits MPT, MTE donnent $MP\ (\sqrt{ax}) . PT\ (2x) :: PT\ (2x) . PE = \frac{4xx}{\sqrt{ax}} = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$; & par conséquent $MP + PE = \sqrt{ax} + \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$.

De plus à cause des triangles rectangles MPQ, MEC, l'on aura $PM\ (\sqrt{ax}) . PQ\ (\tfrac{1}{2}a) :: ME\ (\sqrt{ax} + \frac{4x\sqrt{ax}}{a}) . EC$ ou $PK = \tfrac{1}{2}a + 2x$. & partant $QK = 2x$. Ce qui donne cette nouvelle construction.

Soit priſe QK double de AP, ou (ce qui revient au même) ſoit priſe PK égale à TQ, & ſoit menée KC parallele à PM. Elle rencontrera la perpendiculaire MC en un point C qui ſera à la développée BCG.

Autre manière. $yy = ax$, & $2ydy = adx$ dont la différence (en ſuppoſant dx conſtante) donne $2dy^2 + 2yddy = 0$; d'où l'on tire $-ddy = \frac{dy^2}{y}$. Et mettant cette valeur dans la formule $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, on trouve (*Art.* 77.) $ME = \frac{ydy^2 + ydx^2}{dy^2}$; & partant EC ou $PK = \frac{ydy^2 + ydx^2}{dydx} = \frac{ydy}{dx} + \frac{ydx}{dy} = PQ + PT$ ou TQ. Ce qui donne les mêmes conſtructions qu'auparavant. Car MP . PT :: $dy . dx$ :: PT $(\frac{ydx}{dy})$. $PE = \frac{ydx^2}{dy^2} = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$.

Pour trouver à préſent le point B où l'axe AB touche la développée BCG. On a PQ $(\frac{ydy}{dx}) = \frac{1}{2}a$. Or comme cette quantité eſt conſtante, elle demeurera toujours la même en quelque endroit que ſe trouve le point M. Et ainſi, lorſqu'il tombe ſur le ſommet A, l'on aura encore PQ qui devient en ce cas $AB = \frac{1}{2}a$.

Pour trouver la nature de la développée BCG à la manière de *Deſcartes*. On nommera la coupée BK, u; l'appliquée KG ou PE, t; d'où l'on

aura CK$(t) = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$ & AP + PK — AB(u) $= 3x$; mettant donc pour x sa valeur $\frac{1}{3}u$ dans l'équation $t = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$, l'on en formera une nouvelle $27att = 16u^3$ qui exprimera la relation de BK à KC. D'où l'on voit que la développée BCG de la parabole ordinaire est une seconde parabole cubique dont le paramétre est égal à $\frac{27}{16}$ du paramétre de la parabole donnée.

Il est visible que la développée CBC (*Fig.* 73. *Pl.* 4.) de la parabole commune entiere MAM a deux parties CB, BC qui ont leurs convexités opposées l'une à l'autre, de sorte qu'elles forment en B un point de rebroussement.

AVERTISSEMENT.

On entend par courbes geométriques AMD, BCG (*Fig.* 72. *Pl.* 4.) *celles dont la relation des coupées* AP, BK *aux appliquées* PM, KC, *se peut exprimer par une équation où il ne se rencontre point de différences; & on prend pour* geométrique *tout ce qu'on peut faire par le moyen de ces lignes. L'on suppose ici que les coupées & les appliquées soient des lignes droites.*

COROLLAIRE.

85. LORSQUE la courbe donnée AMD est geométrique, il est clair que l'on pourra toujours trouver (comme dans cet exemple) une équation qui exprime la nature de sa développée BCG; & qu'ainsi cette développée sera aussi geo-

métrique. Mais je dis de plus qu'elle ſera rectifiable, c'eſt-à-dire, qu'on pourra trouver geométriquement des lignes droites égales à une de ſes portions quelconque BC; car il eſt évident (*Art.* 75.) que l'on déterminera avec le ſecours de la ligne AMD, qui eſt geométrique, ſur la tangente CM de la portion BC, un point M tel que la droite CM ne différera de la portion BC que d'une droite donnée AB.

EXEMPLE II.

86. SOIT la courbe donnée MDM (*Fig.* 74. *Pl.* 4.) une hyperbole entre ſes aſymptotes, qui ait pour équation $aa = xy$.

On aura $\frac{aa}{y} = x$, $\frac{-aady}{yy} = dx$, & ſuppoſant dx conſtante, (*Art.* 1.) $\frac{-aayyddy + 2aaydy^2}{y^4} = 0$; d'où l'on tire $ddy = \frac{2dy^2}{y}$; & mettant cette valeur dans $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, il vient (*Art.* 77.) $ME = \frac{ydx^2 + ydy^2}{-2dy^2}$: de ſorte que EC ou $PK = -\frac{ydy}{2dx} - \frac{ydx}{2dy}$. Ce qui donne ces conſtructions.

Soit menée par le point T où la tangente MT rencontre l'aſymptote AB, la ligne TS parallele à MC & qui rencontre MP prolongée en S; ſoit priſe ME égale à la moitié de MS de l'autre côté de l'aſymptote (que l'on regarde ici comme l'axe)

parce que sa valeur est négative; ou bien soit prise PK égale à la moitié de TQ du même côté du point T : je dis que si l'on mene EC parallele, ou KC perpendiculaire à l'axe, elles couperont la droite MC au point cherché C. Car il est clair que MS $= \frac{ydx^2 + ydy^2}{dy^2}$, & que TQ $= \frac{ydy}{dx} + \frac{ydx}{dy}$.

Si l'on fait quelque attention sur la figure de l'hyperbole MDM, on verra que sa développée CLC doit avoir un point de rebroussement L, de même que la développée de la parabole. Pour le déterminer je remarque que le rayon DL de la développée est plus petit que tout autre rayon MC; d'où il suit que la différence de son expression (*Art.* 78.) $\frac{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxddy}$ ou $\frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$ sera (*Sect.* 3.) nulle ou infinie. Ce qui donne, en prenant toujours dx pour constante, $\frac{-3dxdyddy^2\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{1}{2}} + dxdddy\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2ddy^2} = 0$ ou ∞; d'où en divisant par $\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{1}{2}}$, & multipliant ensuite par $dxddy^2$, on tire cette équation $dx^2dddy + dy^2dddy - 3dyddy^2 = 0$ ou ∞, qui servira à trouver pour x une valeur AH, telle que menant l'appliquée HD & le rayon DL de la développée, le point L sera le point de rebroussement cherché.

On a dans cet exemple $y = \frac{aa}{x}$, $dy = \frac{-aadx}{xx}$,

$ddy = \frac{2aadx^2}{x^3}$, $dddy = \frac{-6aadx^3}{x^4}$. C'eſt pourquoi mettant ces valeurs dans l'équation précédente, on trouve A H (x) $= a$. D'où il ſuit que le point D eſt le ſommet de l'hyperbole, & que les lignes A D, D L ne ſont qu'une même droite A L qui en eſt l'axe.

Exemple III.

87. Soit l'equation générale $y^m = x$ (*Fig.* 72. 74. *Pl.* 4.) qui exprime la nature de toutes les paraboles à l'infini, lorſque l'expoſant m marque un nombre poſitif entier on rompu, & de toutes les hyperboles, l'orſqu'il marque un nombre négatif.

On aura $my^{m-1}dy = dx$ dont la différence donne, en prenant dx pour conſtante, $\overline{mm - m}y^{m-2}dy^2 + my^{m-1}ddy = o$; & en diviſant par my^{m-1}, il vient $-ddy = \frac{\overline{m-1}dy^2}{y}$; d'où mettant cette valeur dans $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, on tirera (*Art.* 77.) M E $= \frac{ydx^2 + ydy^2}{\overline{m-1}dy^2}$; & partant E C ou P K $= \frac{ydy}{\overline{m-1}dx} + \frac{ydx}{\overline{m-1}dy}$. Ce qui donne ces conſtructions générales.

Soit menée par le point T où la tangente M T rencontre l'axe A P, la ligne T S parallele à MC & qui rencontre M P prolongée au point S; ſoit

prise ME $= \frac{1}{m-1}$ MS, ou bien soit prise PK $= \frac{1}{m-1}$ TQ : il est clair que si l'on mene par le point E une parallele, ou par le point K une perpendiculaire à l'axe, elles rencontreront MC au point cherché C.

Si m est négatif, comme il arrive dans les hyperboles, la valeur de ME (*Fig.* 74. *Pl.* 4.) sera négative ; & par conséquent elles seront convexes vers leur axe qui sera alors une asymptote. Mais dans les paraboles où m est positif, il peut arriver deux cas. Car ou m (*Fig.* 75. *Pl.* 4.) sera moindre que 1, & alors elles seront convexes du côté de leur axe, qui sera une tangente au sommet : ou m (*Fig.* 72. *Pl.* 4.) surpasse 1, & alors elles seront concaves vers leur axe qui sera perpendiculaire au sommet.

Pour trouver dans ce dernier cas le point B où l'axe AB touche la développée. On a PQ $\left(\frac{ydy}{dx}\right) = \frac{y^{2-m}}{m}$; ce qui donne trois différens cas. Car ou $m = 2$, ce qui n'arrive que dans la parabole ordinaire, & alors l'exposant de y étant nul, cette inconnue s'évanouit ; & par conséquent AB $= \frac{1}{2}$, c'est-à-dire, à la moitié du parametre. Ou m est moindre que 2, & alors l'exposant de y étant positif, elle se trouvera dans le numérateur, ce qui rend (en l'égalant (*Art.* 83.) à zero) la fraction nulle : c'est-à-dire, que le point B tombe en ce cas sur le point A, comme dans la seconde

parabole cubique $axx = y^3$. Ou enfin m (*Fig.* 76. *Pl.* 4.) surpasse 2, & alors l'exposant de y étant négatif, elle sera dans le dénominateur, ce qui rend (lorsqu'elle devient zero) la fraction infinie: c'est-à-dire, que le point B est infiniment éloigné du point A, ou (ce qui est la même chose) que l'axe AB est asymptote de la développée, comme dans la premiere parabole cubique $aax = y^3$. On peut remarquer dans ce dernier cas que la développée CLO (*Fig.* 77. *Pl.* 4.) de la demi-parabole ADM a un point de rebroussement L; de sorte que par le dévelopement de la partie LO continuée à l'infini, le point D ne décrit que la portion déterminée DA; au lieu que par le dévelopement de l'autre partie LC continuée aussi à l'infini, il décrit la portion infinie DM.

On déterminera le point L de même que dans l'hyperbole. Soit par exemple $aax = y^3$, ou $y = x^{\frac{1}{3}}$, on aura $dy = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} dx$, $ddy = -\frac{2}{9} x^{-\frac{5}{3}} dx^2$, $dddy = \frac{10}{27} x^{-\frac{8}{3}} dx^3$; & ces valeurs étant substituées dans l'équation $dx^2 dddy + dy^2 dddy - 3dyddy^2 = 0$, on trouvera (*Art.* 86.) AH $(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{91125}}$ Il en est ainsi des autres.

REMARQUE.

88. En supposant que m surpasse 1, afin que les paraboles soient toujours concaves du côté de leur axe, il peut arriver differens cas. Car si le numérateur de la fraction marquée par m est pair, & le

dénominateur impair ; toutes les paraboles tombent de part & d'autre de leur axe dans une position ſemblable à celle de la parabole ordinaire. (*Fig.* 73. *Pl.* 4.) Mais ſi le numérateur & le dénominateur ſont chacun impair ; elles ont une poſition renverſée de part & d'autre de leur axe, enſorte que leur ſommet A (*Fig.* 77. *Pl.* 4. eſt un point d'infléxion, comme la premiere parabole cubique $x = y^{\frac{3}{1}}$ ou $aax = y^3$. Enfin ſi le numérateur étant impair, le dénominateur eſt pair ; elles ont une poſition renverſée du même côté de leur axe, enſorte que leur ſommet A (*Fig.* 76. *Pl.* 4.) eſt un point de rebrouſſement, comme la ſeconde parabole cubique $x = y^{\frac{3}{2}}$ ou $axx = y^3$. Tout cela ſuit de ce qu'une puiſſance paire ne peut pas avoir une valeur négative. Cela poſé, il eſt évident,

1°. Que dans le point d'infléxion A, (*Fig.* 77. *Pl.* 4.) le rayon de la développée peut être infiniment grand, comme dans $aax = y^3$, ou infiniment petit, comme dans $aax^3 = y^5$.

2°. Que dans le point de rebrouſſement A, (*Fig.* 76. *Pl.* 4.) le rayon de la développée peut être ou infini comme dans $a^3xx = y^5$, ou zero comme dans $axx = y^3$.

3°. Qu'il ne s'enſuit pas (*Fig.* 73. *Pl.* 4.) de ce que le rayon de la développée eſt infini ou zero, que les courbes ayent alors un point d'infléxion ou de rebrouſſement. Car dans $a^3 x = y^4$ il eſt infini, dans $ax^3 = y^4$ il eſt nul ; & cependant ces paraboles tombent de part & d'autre de

leur axe dans une poſition ſemblable à celle de la parabole ordinaire.

EXEMPLE IV.

89. SOIT la courbe AMD (*Fig.* 78. 79. *Pl.* 4 & 5.) une hyperbole ou une ellipſe qui ait pour axe AH (a), & pour parametre AF (b).

On aura par la propriété de ces lignes $y = \sqrt{\frac{abx \mp bxx}{\sqrt{a}}}$, $dy = \frac{abdx \mp 2bxdx}{2\sqrt{aabx \mp abxx}}$, & $ddy = \frac{-a^3bbdx^2}{4aabx \mp 4abxx\sqrt{aabx \mp abxx}}$. Si donc l'on met ces valeurs dans $\frac{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxddy}$ expreſſion générale de (*Art.* 78.) MC, on trouvera dans ces deux courbes $MC = \frac{aabb \mp 4abbx + 4bbxx + 4aabx \mp 4abxx}{2a^3bb} \times \frac{\sqrt{aabb \mp 4abbx + 4bbxx + 4aabx \mp 4abxx}}{2a^3bb} = \frac{4MQ^3}{bb}$, puiſque de part & d'autre MQ $\left(\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}\right)$ $= \frac{\sqrt{aabb \mp 4abbx + 4bbxx + 4aabx \mp 4abxx}}{2a}$. Ce qui donne cette conſtruction qui ſert auſſi pour la parabole.

Soit priſe MC quadruple de la quatriéme continuellement proportionnelle au parametre AF & à la perpendiculaire MQ terminée par l'axe ; le point C ſera à la développée.

Si l'on fait $x = o$, on aura (*Art.* 83.) AB $= \frac{1}{2}b$. Et ſi l'on fait dans l'ellipſe $x = \frac{1}{2}a$, on

trouvera DG (*Fig.* 79. *Pl.* 5.) $= \frac{a\sqrt{ab}}{2b}$, c'eſt-à-dire, égal à la moitié du parametre du petit axe. D'où l'on voit que dans l'ellipſe la développée BCG ſe termine en un point G du petit axe DO, où elle forme un point de rebrouſſement; au lieu que dans la parabole & l'hyperbole elle s'étend à l'infini.

Si $a = b$ dans l'ellipſe, il vient MC $= \frac{1}{2}a$; d'où il ſuit que tous les rayons de la développée ſont égaux entr'eux, & qu'elle ne ſera par conſéquent qu'un point : c'eſt-à-dire, que l'ellipſe devient en ce cas un cercle qui a pour développée ſon centre. Ce que l'on ſçait d'ailleurs être véritable.

EXEMPLE V.

90. SOIT la courbe AMD (*Fig.* 80. *Pl.* 5.) une logarithmique ordinaire, dont la nature eſt telle qu'ayant mené d'un de ces points quelconque M la perpendiculaire MP ſur l'aſymptote KP, & la tangente MT; la ſoutangente PT ſoit toujours égale à la même droite donnée a.

On a donc PT $(\frac{ydx}{dy}) = a$, d'où l'on tire $dy = \frac{ydx}{a}$, dont la différence donne, en prenant dx pour conſtante, $ddy = \frac{dydx}{a} = \frac{ydx^2}{aa}$; & mettant ces valeurs dans $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, on trouve (*Art.* 77.) ME $= \frac{-aa - yy}{y}$; & partant EC ou PK $=$

$\frac{-aa-yy}{a}$. Ce qui donne cette conſtruction.

Soit priſe P K égale à T Q du même côté de T, parce que ſa valeur eſt négative ; & ſoit menée K C parallele à P M : je dis qu'elle rencontrera la perpendiculaire M C au point cherché C. Car T Q $= \frac{aa+yy}{a}$.

Si l'on veut que le point M ſoit celui de la plus grande courbure, on ſe ſervira de la formule $dx^2 dddy + dy^2 dddy - 3dyddy^2 = o$, que l'on a trouvée (*Art.* 86.) dans l'exemple ſecond ; & mettant pour dy, ddy, $dddy$, leurs valeurs $\frac{ydx}{a}$, $\frac{ydx^2}{aa}$, $\frac{ydx^3}{a^3}$, on trouvera P M (y) $a\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Il eſt clair, en prenant dx pour conſtante, que les appliquées y ſont entr'elles comme leurs différences dy ou $\frac{ydx}{a}$; d'où il ſuit qu'elles ſont auſſi une progreſſion géométrique. Car ſi l'on conçoit que l'aſymptote ou l'axe P K ſoit diviſé en un nombre infini de petites parties égales Pp ou M R, pf ou mS, fg ou nH, &c. compriſes entre les appliquées P M, pm, fn, go, &c. l'on aura P M . pm : : Rm . Sn : : P M + Rm ou pm . pm + Sn ou fn. On prouve de même que pm . fn : : fn . go, & ainſi de ſuite. Les appliquées PM, pm, fn, go, &c. feront donc entr'elles une progreſſion géométrique.

EXEMPLE VI.

91. SOIT la courbe AMD (*Fig.* 81. *Pl.* 5.) une logarithmique ſpirale, dont la nature eſt telle qu'ayant mené d'un de ſes points quelconque M au point fixe A, qui en eſt le centre, la droite MA & la tangente MT; l'angle AMT ſoit par tout le même.

L'angle AMT ou A*m*M étant conſtant, la raiſon de *m*R (dy) à RM (dx) ſera auſſi conſtante. Il faut donc que la différence de $\frac{dy}{dx}$ ſoit nulle; ce qui donne (en ſuppoſant dx conſtante) $ddy = 0$. C'eſt pourquoi effaçant le terme $yddy$ dans $\frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + dy^2 - yddy}$ expreſſion (*Art.* 77.) générale de ME, lorſque les appliquées partent toutes d'un même point, on trouve $ME = y$, c'eſt-à-dire, ME = AM. Ce qui donne cette conſtruction.

Soit menée AC perpendiculaire ſur AM, & qui rencontre en C la droite MC perpendiculaire à la courbe; le point C ſera à la dévelopée ACB.

Les angles AMT, ACM ſont égaux, puiſqu'étant joints l'un & l'autre au même angle AMC ils font un angle droit. La développée ACG ſera donc la même logarithmique ſpirale que la donnée AMD, & elle n'en différera que par ſa poſition.

Si l'on ſuppoſe que le point C de la développée ACG étant donné, il faille déterminer la longueur CM de ſon rayon en ce point, qui (*Art.* 75.)

eſt égal à la portion AC qui fait une infinité de retours avant que de parvenir en A ; il eſt clair qu'il n'y a qu'à mener AM perpendiculaire ſur AC. De ſorte que ſi l'on mene AT perpendiculaire ſur AM, la tangente MT ſera auſſi égale à la portion AM de la logarithmique ſpirale donnée AMD.

Si l'on conçoit une infinité d'appliquées AM, A*m*, A*n*, A*o*, &c. qui faſſent entr'elles des angles infiniment petits & égaux ; il eſt clair que les triangles MA*m*, *m*A*n*, *n*A*o*, &c. ſeront ſemblables, puiſque les angles en A ſont égaux, & que par la proprieté de la logarithmique, les angles en *m*, *n*, *o*, &c. le ſont auſſi. Et partant AM. A*m* : : A*m*. A*n*. Et A*m*. A*n* : : A*n*. A*o*. & ainſi de ſuite. D'où l'on voit que les appliquées AM, A*m*, A*n*, A*o*, &c. font une progreſſion geométrique, lorſqu'elles font entr'elles des angles égaux.

Exemple. VII.

92. Soit la courbe AMD (*Fig.* 82. *Pl.* 5.) une des ſpirales à l'infini, formée dans le ſecteur BAD avec une proprieté telle qu'ayant mené un rayon quelconque AMP, & ayant nommé l'arc entier BPD, b; ſa partie BP, z; le rayon AB ou AP, a; & ſa partie AM, y; on ait cette proportion $b. z :: a^m. y^m$.

L'équation à la ſpirale AMD eſt $y^m = \frac{a^m z}{b}$; dont la différence donne $my^{m-1}dy = \frac{a^m dz}{b}$. Or à cauſe

cause des secteurs semblables AMR, APp, l'on aura AM (y). AP (a) :: MR (dx). Pp (dz) $= \frac{adx}{y}$. Mettant donc cette valeur à la place de dz dans l'équation que l'on vient de trouver, on aura $my^m dy = \frac{a^{m+1}dx}{b}$ dont la différence (en prenant dx pour constante) est $mmy^{m-1}dy^2 + my^m ddy = 0$; d'où en divisant par my^{m-1}, l'on tire $-yddy = mdy^2$; & partant ME (*Art.* 77.) $\left(\frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + dy^2 - yddy}\right) = \frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + \overline{m+1}\,dy^2}$; ce qui donne cette construction.

Soit menée par le centre A la droite TAQ perpendiculaire sur AM, & qui rencontre en T la tangente MT, & en Q la perpendiculaire MQ; soit fait $TA + \overline{m+1}\,AQ$. TQ :: MA. ME. Je dis que menant EC parallele à TQ, elle ira rencontrer MQ en un point C qui sera à la développée.

Car à cause des paralleles MRG, TAQ, l'on aura MR (dx) $+ \overline{m+1}$ RG $\left(\frac{dy^2}{dx}\right)$. MG $\left(dx + \frac{dy^2}{dx}\right)$ :: $TA + \overline{m+1}\,AQ$. TQ :: AM (y). ME $= \frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + \overline{m+1}\,dy^2}$.

EXEMPLE. VIII.

93. SOIT AMD (*Fig.* 83. *Pl.* 5.) une demi-roulette simple, dont la base BD est égale à la demi-circonférence BEA du cercle générateur.

Ayant nommé A P, x; PM, y; l'arc A E, u; & le diametre A B, $2a$; l'on aura par la propriété du cercle $PE = \sqrt{2ax - xx}$; & par celle de la roulette $y = u + \sqrt{2ax - xx}$, dont la différence donne $dy = du + \frac{adx - xdx}{\sqrt{2ax - xx}} = \frac{2adx - xdx}{\sqrt{2ax - xx}}$ ou $dx\sqrt{\frac{2a - x}{x}}$, en mettant pour du sa valeur $\frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$; en supposant dx constante, $ddy = \frac{-adx^2}{x\sqrt{2ax - xx}}$; & en mettant ces valeurs dans $\frac{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dxddy}$, il vient (*Art.* 78.) MC $= 2\sqrt{4aa - 2ax}$, c'est-à-dire, 2B E ou 2M G.

Si l'on fait $x = o$, l'on aura A N $= 4a$ pour rayon de la développée dans le sommet A. Mais si l'on fait $x = 2a$, on trouvera que le rayon de la développée au point D devient nul ou zero; d'où l'on voit que la développée a son origine en D, & qu'elle se termine en N, ensorte que BN $=$ B A.

Pour sçavoir la nature de cette développée, il n'y a qu'à achever le rectangle BS, décrire le demi-cercle DIS qui a pour diametre DS, & mener DI parallele à MC ou à BE. Cela fait, il est clair que l'angle BDI est égal à l'angle EBD; & par conséquent que les arcs DI, BE sont égaux entr'eux; d'où il suit que leurs cordes DI, BE ou GC sont aussi égales. Si donc l'on tire IC, elle sera égale & parallele à DG,

qui par la génération de la roulette est égale à l'arc BE ou DI ; & partant la développée DCN est une demi-roulette qui a pour base la droite NS égale à la demi-circonférence DIS de son cercle générateur : c'est-à-dire, que c'est la demi-roulette même AMDB, posée dans une situation renversée.

COROLLAIRE.

94. IL est clair (*Art.* 75.) que la portion de roulette DC est double de sa tangente CG ; ou de la corde correspondante DI. Et la demi-roulette DCN double du diamètre BN ou DS de son cercle générateur.

AUTRE SOLUTION.

95. ON peut encore trouver la longueur du rayon MC sans aucun calcul, en cette sorte. Ayant imaginé une autre perpendiculaire *m*C infiniment proche de la premiere, une autre parallele *me*, une autre corde B*e*, & décrit des centres, C, B les petits arcs GH, EF, on formera les triangles rectangles GH*g*, EF*e* qui seront égaux & semblables ; car G*g* = E*e*, puisque BG ou ME est égale à l'arc AE, & de même B*g* ou *me* est égal à l'arc A*e* ; de plus H*g* ou *mg* — MG = F*e* ou B*e* — BE ; GH sera donc égal à EF. Or les perpendiculaires MC, *m*C, étant paralleles aux cordes EB, *e*B, l'angle MC*m* sera égal à l'angle EB*e*. Donc puisque les arcs GH, EF, qui mesurent ces angles, sont

égaux, il s'ensuit que leurs rayons CG, BE seront aussi égaux ; & partant que MC doit être prise double de MG ou de BE.

LEMME.

96. S'IL *y a un nombre quelconque de quantités* a, b, c, d, e, *&c. soit que ce nombre soit fini ou infini, soit que ces quantités soient des lignes, ou des surfaces, ou des solides ; la somme* a — b + b — c + c — d + d — e, *&c. de toutes leurs différences est égale à la plus grande* a, *moins la plus petite* e, *ou simplement à la plus grande, lorsque la plus petite est zero.* Ce qui est visible.

COROLLAIRE I.

97. LES secteurs CM*m*, CGH, étant semblables, il est clair que M*m* est double de GH ou de son égale EF ; & comme cela arrive toujours en quelque endroit que l'on suppose le point M, il s'ensuit que la somme de tous les petits arcs M*m*, c'est à dire, la portion A*m* de la demi-roulette AMD, est double de la somme de tous les petits arcs EF. Or le petit arc EF fait partie de la corde AE perpendiculaire sur BE, & est la différence des cordes AE, A*e*, parce que la petite droite *e*F perpendiculaire sur A*e* peut être considerée comme un petit arc décrit du centre A ; & partant la somme de tous les petits arcs EF dans l'arc AZE sera la somme des différences de toutes les cordes AE, A*e*, &c. dans cet arc, c'est-à-dire, par le Lemme qu'elle sera égale à la corde AE. Il est donc évident

que la portion AM de la demi-roulette AMD eſt double de la corde correſpondante AE.

COROLLAIRE II.

98. L'ESPACE MGgm (*Art.* 2.) ou le trapéze MGHm $= \overline{\frac{1}{2}Mm + \frac{1}{2}GH} \times MG = \frac{3}{2}EF \times BE$, c'eſt-à-dire, qu'il eſt triple du triangle EBF ou EBe ; d'où il ſuit que l'eſpace MGBA, ſomme de tous ces trapézes, eſt triple de l'eſpace circulaire BEZA, ſomme de tous ces triangles.

COROLLAIRE III.

99. NOMMANT BP, z; l'arc AZE ou EM ou BG, u ; & le rayon KA, a ; l'on aura le parallelélogramme MGBE $= uz$. Or l'eſpace de la roulette MGBA $=$ 3BEZA $=$ 3EKB $+ \frac{1}{2}au$; & partant l'eſpace AMEB renfermé par la portion de roulette AM, la parallele ME, la corde BE & le diamètre AB, eſt $=$ 3EKB $+ \frac{1}{2}au - uz$. D'où il ſuit que ſi l'on prend BP (z) $= \frac{1}{2}a$, l'eſpace AMEB ſera triple du triangle correſpondant EKB ; & aura par conſéquent ſa quadrature indépendante de celle du cercle. Ce que M. *Hugens* a remarqué le premier. Voici encore une autre ſorte d'eſpace qui a la même propriété.

Si l'on retranche de l'eſpace AMEB le ſegment BEZA, il reſtera l'eſpace AZEM $=$ 2EKB $+ au - uz$; d'où l'on voit que ſi le point P tombe au centre K, l'eſpace AZEM ſera égal au quarré du rayon. Il eſt évident qu'entre tous les eſpaces AMEB & AZEM, il n'y a que

les deux que l'on vient de déterminer qui ayent leur quadrature absolue indépendante de celle du cercle.

EXEMPLE IX.

100. SOIT la demi-roulette AMD (*Fig.* 84. *Pl.* 5.) décrite par la révolution du demi-cercle AEB autour d'un autre cercle immobile BGD; & qu'il faille déterminer sur la perpendiculaire MG donnée de position, le point où elle touche la développée.

Pour se servir des formules générales il faudroit prendre pour les appliquées de la courbe AMD, des lignes droites perpendiculaires sur l'axe OA, & chercher ensuite une équation qui exprimât la rélation des coupees aux appliquées, ou de leurs différences. Mais comme le calcul en seroit fort pénible, il vaut beaucoup mieux dans ces sortes de rencontres en tenter la solution en se servant de la génération même.

Lorsque le demi-cercle AEB est parvenu dans la position MGB dans laquelle il touche en G la base BD; & que le point décrivant A tombe sur le point M de la demi-roulette AMD : il est clair,

1°. Que l'arc GM est égal à l'arc GD, comme aussi l'arc GB du cercle mobile à larc GB du cercle immobile.

2°. Que MG est (*Art.* 43.) perpendiculaire sur la courbe; car considérant la demi-circonférence MGB ou AEB, & la base BGD comme l'assemblage d'une infinité de petites droites

égales chacune à sa corréspondante, il est manifeste que la demi-roulette AMD sera l'assemblage d'une infinité de petits arcs qui auront pour centre successivement tous les points touchans G, & qui seront décrits chacun par le même point M ou A.

3°. Que si l'on décrit du centre O du cercle immobile l'arc concentrique ME; les arcs MG, EB du cercle mobile seront égaux entr'eux, aussi-bien que leurs cordes MG, EB, & les angles OGM, OBE. Car les droites OK, OK, qui joignent les centres des deux cercles sont égales, puisqu'elles passent par les points touchans B, G; c'est pourquoi menant les rayons OM, OE, & KE, on formera les triangles OKM, OKE égaux & semblables. L'angle OKM étant donc égal à l'angle OKE; les arcs MG, BE des demi-cercles égaux MGB, BEA, qui mesurent ces angles, seront égaux, comme aussi leurs cordes MG, EB; d'où il suit que les angles OGM, OBE le seront aussi.

Cela posé, soit entendue une autre perpendiculaire *m*C (*Fig.* 85. *Pl.* 5.) infiniment proche de la premiere, un autre arc concentrique *me*, & une autre corde B*e*; soient décrits des centres C, B, les petits arcs GH, EF. Les triangles rectangles GH*g*, EF*e* seront égaux & semblables; car G*g* ou D*g* — DG = E*e* ou à l'arc B*e* — l'arc BE, de plus H*g* ou *mg* — MG = F*e* ou à B*e* — BE Le petit arc GH sera donc égal au petit arc EF; d'où il suit que l'angle GCH

est à l'angle EBF, comme BE est à CG. Ainsi toute la difficulté se réduit à trouver le rapport de ces angles. Ce qui se fait en cette sorte.

Ayant mené les rayons OG, Og, KE, Ke, & nommé OG ou OB, b; KE ou KB ou KA, a; il est clair que l'angle EBe = OBe — OBE = Ogm — OGM = (en menant GL, GV paralleles à Cm, Og) LGM — OGV = GCH — GOg. On aura donc l'angle GCH = GOg + EBF. Or les arcs Gg, Ee étant égaux, l'on aura aussi GOg. EKe ou 2EBF : : KE (a). OG (b); & partant l'angle GOg = $\frac{2a}{b}$ EBF, & GCH = $\frac{2a+b}{b}$ EBF. Donc GCH. EBF ou BE. CG : : $\frac{2a+b}{b}$. 1. & partant l'inconnue CG = $\frac{b}{2a+b}$ BE ou MG. Ce qui donne cette construction.

Soit fait OA (*Fig.* 86. *Pl.* 5.) ($2a+b$). OB (b) : : MG. GC; le point C sera à la développée.

Il est clair 1°. Que cette développée commence au point D, & qu'elle y touche la base BGD; puisque l'arc GM devient en ce point infiniment petit. 2°. Qu'elle se termine au point N, ensorte que OA. OB : : AB. BN : : OA — AB ou OB. OB — BN ou ON; c'est-à-dire, que OA, OB, ON sont continuellement proportionnelles. 3°. Si l'on décrit à présent le cercle

NSQ du centre O, je dis que la développée DCN est formée par la révolution du cercle mobile GCS, qui a pour diamètre GS ou BN, autour de l'immobile NSQ : c'est-à-dire, qu'elle est une demi-roulette semblable à la proposée, ou de même espece (parce que les diamètres AB, BN des cercles mobiles ont entr'eux le même rapport que les rayons OB, ON des cercles immobiles), & posée dans une situation renversée, ensorte que son sommet est en D. Pour le prouver, supposons que les diamètres des cercles mobiles se trouvent sur la droite OT menée à discrétion du centre O ; elle passera par les points touchans S, G ; & faisant AB ou TG. BN ou GS : : MG. GC, le point C sera à la développée, & de plus à la circonférence du cercle GCS ; car l'angle GMT étant droit, l'angle GCS le sera aussi. Or à cause des angles égaux MGT, CGS, l'arc TM ou GB est à l'arc CS, comme le diamètre GT au diamètre GS : : OG. OS : : GB. NS ; & partant les arcs CS, SN sont égaux. Donc, &c.

Corollaire I.

101. Il est clair (*Art.* 75.) que la portion de roulette DC est égale à la droite CM ; & partant que DC est à sa tangente CG : : AB + BN. BN : : OB + ON. ON ; c'est à-dire, comme la somme des diamètres des deux cercles générateurs, ou des cercles mobile & immobile, est au rayon du cercle immobile. Cette verité se dé-

couvre encore de la maniére qui ſuit. A cauſe des triangles ſemblables CMm, CGH, (*Fig.* 85. *Pl.* 5.) l'on aura Mm. GH ou EF :: MC. GC :: $OA + OB$ ($2a + 2b$). OB (b). D'où il ſuit (comme dans l'art 97.) que la portion de roulette AM eſt à la corde correſpondante AE, comme la ſomme des diamètres du cercle générateur & de la baſe, eſt au rayon de la baſe.

COROLLAIRE II.

102. LE trapéze $MGHm$ (*Fig.* 85. *Pl.* 5.) $= \overline{\tfrac{1}{2}GH + \tfrac{1}{2}Mm} \times MG$. Or CG ($\frac{b}{2a+b}MG$). CM ($\frac{2a+2b}{2a+b}MG$) :: GH. $Mm = \frac{2a+2b}{b}GH$. Donc puiſque $GH = EF$, & $MG = EB$, l'on aura $MGHm = \frac{2a+3b}{2b} EF \times EB$: c'eſt-à-dire, que le trapéze $MGHm$ ſera toujours au triangle correſpondant EBF :: $2a + 3b$. b.

D'où il ſuit que l'eſpace MGBA renfermé par MG, AB perpendiculaires à la roulette, par l'arc BG & par la portion de roulette MA, eſt au ſegment de cercle correſpondant BEZA :: $2a + 3b$. b.

COROLLAIRE III.

103. IL eſt viſible que la quadrature indéfinie de la roulette dépend de la quadrature du cercle; mais ſi l'on prend OQ (*Fig.* 87. *Pl.* 5.) moyenne proportionnelle entre OK, OA, & qu'on décrive de ce rayon l'arc QEM; je dis que l'eſ-

pace A B E M renfermé par le diamètre A B, la corde B E, l'arc E M, & par la portion de roulette A M, eſt au triangle E K B : : $2a+3b \,.\, b$. Car nommant l'arc AE ou G B, u ; le rayon OQ, z ; l'on aura OB (b) . OQ (z) : : GB (u) . RQ ou ME $= \frac{uz}{b}$. Et partant l'eſpace R G B Q ou M G B E, c'eſt-à-dire, $\overline{\frac{1}{2}GB + \frac{1}{2}RQ} \times BQ = \frac{zzu - bbu}{2b}$. Or (*Art.* 102.) l'eſpace de la roulette MGBA $= \frac{2a+3b}{b} \times$ BEZA $= \frac{2a+3b}{b} \times$ EKB $+ \frac{2a+3b}{b} \times$ KEZA ($\frac{au}{2}$). Si donc l'on retranche le précédent eſpace de celui-ci, il reſtera ABEM $= \frac{2aau + 3abu + bbu - zzu}{2b} + \frac{2a+3b}{b} \times$ E K B $= \frac{2a+3b}{b}$ E K B, puiſque par la conſtruction $zz = 2aa + 3ab + bb$. D'où l'on voit que cet eſpace a ſa quadrature indépendante de celle du cercle, & qu'il eſt le ſeul parmi tous ſes ſemblables.

En voici encore un autre qui a la même proprieté. Si l'on retranche de l'eſpace A B E M le ſegment B E Z A ($\frac{1}{2}au$ + E K B,) il reſtera l'eſpace A Z E M $= \frac{2aau + 2abu + bbu - zzu}{2b} + \frac{2a+2b}{b}$ E K B $= \frac{2a+2b}{b}$ E K B en faiſant $zz = 2aa + 2ab + bb$: c'eſt-à-dire, que ſi l'on diviſe la demi-circonférence en deux également au point E, l'eſ-

pace AZEM sera au double du triangle EKB, c'est-à-dire, au quarré du rayon : : OK $(a+b)$. OB (b).

COROLLAIRE IV.

104. Si le cercle mobile AEB (*Fig.* 88. *Pl.* 5.) roule au dedans de l'immobile BGD, son diamètre AB devient négatif, de positif qu'il étoit auparavant ; & partant il faut changer de signes les termes où il se rencontre avec une dimension impaire. D'où il suit, 1°. Que si l'on mene à discrétion la perpendiculaire MG à la roulette, & que l'on fasse OA $(b-2a)$. OB (b) : : MG. GC. le point C sera (*Art.* 100.) à la développée DCN décrite par la révolution du cercle qui a pour diamètre BN, au dedans de la circonférence NS concentrique à BD. 2°. Que si l'on décrit du centre O l'arc ME, la portion de roulette AM sera (*Art.* 101.) à la corde AE : : $2b-2a.b$. 3°. Que l'espace MGBA est (*Art.* 102.) au segment BEZA : : $3b-2a.b$. 4°. Que si l'on prend $OQ=\sqrt{2aa-3ab+bb}$, c'est-à-dire, moyenne proportionnelle entre OK, OA ; l'espace ABEM renfermé par la portion de roulette AM, l'arc ME, la corde EB, & le diamètre AB, sera (*Art.* 103.) au triangle EKB : : $3b-2a.b$. Mais que si l'on fait OQ ou $OE=\sqrt{2aa-2ab+bb}$, c'est-à-dire, que l'arc AE soit le quart de la circonférence ; l'espace AZEM renfermé par la portion AM de roulette & par les deux arcs ME, AE, sera (*Ibid.*) au

triangle EKB qui eſt en ce cas la moitié du quarré du rayon :: $2b - 2a . b$.

COROLLAIRE V.

105. Si l'on conçoit que le rayon OB (*Fig.* 86. *Pl.* 5.) du cercle immobile devienne infini, l'arc BGD deviendra une ligne droite, & la courbe AMD deviendra la roulette ordinaire. Or comme dans ce cas le diamètre AB du cercle mobile eſt nul par rapport à celui de l'immobile ; il s'enſuit, 1°. Que MG . GC :: $b . b$. Puiſque $b \pm 2a = b$, c'eſt-à-dire, que MG = GC ; & partant que ſi l'on prend BN = AB, & qu'on mene la droite NS parallele à BD, la développée DCN ſera formée par la révolution du cercle, qui a pour diamètre BN, ſur la baſe NS. 2°. Que la portion de roulette AM (*Fig.* 85. 88. *Pl.* 5.) eſt à la corde correſpondante AE :: $2b . b$. 3°. Que l'eſpace MGBA eſt au ſegment BEZA :: $3b . b$. 4°. Puiſque BQ (*Fig.* 87. 88. *Pl.* 5.) ou $\pm$ OQ $\mp$ OB, que j'appelle x, eſt $= \mp b \pm \sqrt{2aa \pm 3ab + bb}$, d'où l'on tire (en ôtant les incommenſurables) $xx \pm 2bx = 2aa \pm 3ab$; l'on aura $x = \frac{3}{2}a$, en effaçant les termes où b ne ſe rencontre point, parce qu'ils ſont nuls par rapport aux autres. C'eſt-à-dire, que ſi l'on prend dans la roulette ordinaire BP $= \frac{3}{4}$ AB, & qu'on mene la droite PEM (*Fig.* 83. *Pl.* 5.) parallele à la baſe BD ; l'eſpacc AMEB ſera triple du triangle EKB. On trouvera en opérant de la même maniére, que ſi le point P tombe au centre K, l'eſpace AZEM

renfermé par la portion de roulette AM, la droite ME, & l'arc AE, sera égal au quarré du rayon. Ce que l'on a déja démontré ci-devant art. 99.

REMARQUE.

106. COMME les arcs DG, GM (*Fig.* 84. *Pl.* 5.) sont toujours égaux entr'eux, il s'ensuit que l'angle DOG est aussi toujours à l'angle GKM :: GK. OG. C'est pourquoi l'origine D de la roulette DMA, les rayons OG, GK des cercles générateurs, & le point touchant G étant donnés, si l'on veut déterminer dans cette position le point M qui décrit la roulette, il ne faut que tirer le rayon KM, ensorte que l'angle GKM soit à l'angle donné DOG :: OG. GK. Or je dis maintenant que cela se peut toujours faire géométriquement, lorsque le rapport de ces rayons se peut exprimer par nombres ; & partant que la roulette DMA est alors géométrique.

Car supposant, par exemple, que OG. GK :: 13. 5 ; il est clair que l'angle MKG doit contenir deux fois l'angle donné DOG, & de plus $\frac{3}{5}$ de cet angle. Toute difficulté se réduit donc à diviser l'angle DOG en cinq parties égales. Or c'est une chose connue par les Geométres, qu'on peut toujours diviser géométriquement un angle ou un arc donné en tant de parties égales qu'on voudra; puisqu'on arrive toujours à quelque équation qui ne renferme que des lignes droites. Donc, &c.

Je dis de plus que la roulette DMA eſt mécanique, ou ce qui eſt la même choſe, qu'on ne peut déterminer géométriquement ſes points M, lorſque la raiſon de OG à KG ne ſe peut exprimer par nombres, c'eſt-à-dire, lorſqu'elle eſt ſourde.

Car (*Fig.* 89. *Pl.* 5.) toute ligne, ſoit mécanique ſoit géométrique, ou rentre en elle-même ou s'étend à l'infini; puiſqu'on peut toujours en continuer la génération. Si donc le cercle mobile ABC décrit par ſon point A dans ſa premiere révolution la roulette ADE, cette roulette ne ſera pas encore finie, & continuant toujours de rouler il décrira la ſeconde EFG, puis la troiſiéme GHI, & ainſi de ſuite juſqu'à ce que le point décrivant A retombe après pluſieurs révolutions dans le même point d'où il étoit parti. Et pour lors ſi on recommence à faire rouler le cercle mobile ABC, il décrira derechef la même ligne courbe, de ſorte que toutes ces roulettes priſes enſemble ne compoſent qu'une ſeule courbe ADEFGHI, &c. Or les rayons des cercles générateurs étant incommenſurables, leurs circonférences le ſeront auſſi; & par conſéquent le point décrivant A du cercle mobile ABC ne pourra jamais retomber dans le point A de l'immobile, d'où il étoit parti, ſi grand que puiſſe être le nombre des révolutions. Il y aura donc une infinité de roulettes qui ne formeront cependans qu'une même ligne courbe ADEFGHI, &c. Maintenant ſi l'on mene au travers du cercle

immobile une ligne droite indéfinie, il eſt clair qu'elle coupera la courbe continuée à l'infini en une infinité de points. Or comme l'équation qui exprime la nature d'une ligne géométrique doit avoir au moins autant de dimenſions que cette ligne peut être coupée en de différens points par une droite ; il s'enſuit que l'équation qui exprimeroit la nature de cette courbe auroit une infinité de dimenſions. Ce qui ne pouvant être, on voit évidemment que la courbe doit être mécanique ou tranſcendente.

PROPOSITION III.

PROBLÊME.

107. LA *ligne courbe* BFC (*Fig.* 90. *Pl.* 5.) *étant donnée, trouver une infinité de lignes* AM, BN, EFO, *dont elle ſoit la développée commune.*

Si l'on développe la courbe BFC en commençant par le point A, il eſt clair que tous les points A, B, F, du fil ABFC décriront dans ce mouvement des lignes courbes AM, BN, FO, qui auront toutes pour développée commune la courbe donnée BFC. Mais il faut obſerver que la ligne FO n'ayant pour développée que la partie FC, ſon origine n'eſt pas en F ; & que pour la trouver, il faut développer la partie reſtante BF, en commençant au point F, pour décrire la portion EF de la courbe EFO dont l'origine eſt en E, & qui a pour développée la courbe entiére BFC.

Si

Si l'on veut trouver les points M, N, O ſans ſe ſervir du fil ABFC, il n'y a qu'à prendre ſur une tangente quelconque CM, autre que BA, les parties CM, CN, CO égales à ABFC, BFC, FC.

COROLLAIRE.

108. IL eſt évident, 1°. Que les courbes AM, BN, EFO ſont d'une nature très-différente entr'elles ; puiſque la courbe AM a dans ſon ſommet A le rayon de ſa développée égal à AB, au lieu que celui de la courbe BN eſt nul. Il eſt viſible auſſi par la figure même de la courbe EFO qu'elle eſt très différente des courbes AM, BN.

2°. Que les courbes AM, BN, EFO ne ſont géométriques que lorſque la donnée BFC eſt géométrique & de plus rectifiable. Car ſi elle n'eſt pas géométrique, en prenant BK pour la coupée, on ne trouvera point géométriquement l'appliquée KC : & ſi elle n'eſt pas rectifiable, ayant mené la tangente CM, on ne pourra déterminer géométriquement les points M, N, O des courbes AM, BN, EFO ; puiſqu'on ne peut trouver géométriquement des lignes droites égales à la ligne courbe BFC, & à ſes portions BF, FC.

REMARQUE.

109. SI l'on développe une ligne courbe BAC (*Fig.* 91. *Pl.* 5.) qui ait un point d'infléxion en A, en commençant par le point D, autre que le point d'infléxion ; on formera par le développe-

ment de la partie B A D la partie DEF ; & par celui de la partie DC, la partie reſtante D G : de ſorte que F E D G ſera la courbe entiere formée par le développement de B A C. Or il eſt viſible que cette courbe rebrouſſe chemin aux points D & E, avec cette différence qu'au point de rebrouſſement D les parties D E, D G ont leur convexité oppoſée l'une à l'autre ; au lieu qu'au point E les parties D E, E F ſont concaves vers le même côté. On a enſeigné dans la ſection précédente à trouver les points de rebrouſſement tels que D : il eſt queſtion maintenant de déterminer les points E, qu'on peut appeller points de rebrouſſement de la ſeconde ſorte, & que perſonne, que je ſçache, n'a encore conſideré.

Pour en venir à bout, on menera à diſcrétion ſur la partie DE deux perpendiculaires M N, *mn*, terminées par la développée aux points N, *n*, par leſquels on tirera deux autres perpendiculaires N H, *n*H ſur les premieres N M, *n m* ; ce qui formera deux petits ſecteurs MN*m*, NH*n* qui ſeront ſemblables, puiſque les angles MN*m*, NH*n* ſont égaux. On aura donc N*n* : M*m* : : NH . NM. Or dans le point d'infléxion A le rayon N H devient (*Art.* 81.) infini ou zero ; & le rayon MN, qui devient AE, demeure d'une grandeur finie. Il faut donc qu'au point de rebrouſſement E de la ſeconde ſorte, la raiſon de la différence N*n* du rayon MN de la développée, à la différence M*m* de la courbe, devienne ou infiniment grande ou infiniment petite. Et partant puiſque (*Art.* 86.) N*n*

$$= \frac{-3dxdyddy^2\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{1}{2}}+dxdddy\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2ddy^2}$$, & Mm $=\sqrt{dx^2+dy^2}$, l'on aura $\frac{dx^2dddy+dy^2dddy-3dyddy^2}{dxddy^2}$ $= o$ ou ∞ ; & multipliant par $dxddy^2$, on trouvera la formule $dx^2dddy + dy^2dddy - 3dyddy^2$ $= o$ ou ∞, qui servira à déterminer les points de rebroussement de la seconde sorte.

On peut encore concevoir qu'une rebroussante DEF (*Fig.* 92. 93. *Pl.* 5.) ou HDEFG de la seconde sorte, ait pour développée une autre rebroussante BAC de la seconde sorte, telle que son point de rebroussement A réponde au point de rebroussement E, c'est-à-dire, qu'il soit situé sur le rayon de la développée qui part du point E. Or il est clair dans cette supposition, que le rayon EA de la développée sera toujours un *plus petit* ou un *plus grand* ; & partant que la différence de $\frac{\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$ expression générale (*Art.* 78.) des rayons de la développée, doit être nulle ou infinie au point cherché E ; ce qui donne la même formule qu'auparavant : de sorte qu'elle est générale pour trouver les points de rebroussement de la seconde sorte. (*Consultez pour toute cette Section la Note cinquantieme.*

SECTION VI.

Usage du calcul des différences pour trouver les Caustiques par réfléxion.

DÉFINITION.

SI l'on conçoit qu'une infinité de rayons BA, BM, BD, (*Fig.* 94. 95. *Pl.* 5.) qui partent d'un point lumineux B, se réfléchissent à la rencontre d'une ligne courbe AMD, ensorte que les angles de réfléxion soient égaux aux angles d'incidence; la ligne HFN, que touchent les rayons réfléchis ou leur prolongement AH, MF, DN, est appellée *Caustique par réfléxion.*

COROLLAIRE I.

110 SI l'on prolonge HA en I, (*Fig.* 94. *Pl.* 5.) de sorte que AI = AB, & que l'on développe la caustique HFN en commençant au point I; on décrira la courbe ILK, telle que la tangente FL sera (*Art.* 75.) continuellement égale à la portion FH de la caustique, plus à la droite HI. Et si l'on conçoit deux rayons incident & réfléchi B*m*, *m*F infiniment près de BM, MF, & qu'ayant prolongé F*m* en *l*, on décrive des centres F, B les petits arcs MO, MR: on formera les petits triangles rectangles MO*m*, MR*m*, qui seront semblables & égaux; car puisque l'angle O*m*M = F*m*D = R*m*M, & que de plus l'hypotenuse M*m* est commune, les petits côtés

O*m*, R*m* seront égaux entr'eux. Or puisque O*m* est la différence de LM, & R*m* celle de BM, & que cela arrive toujours en quelque endroit qu'on prenne le point M; il s'ensuit que ML — IA ou AH + HF — MF somme (*Art.* 96.) de toutes les différences O*m* dans la portion de courbe AM, est = BM — BA somme (*Art.* 96.) de toutes les différences R*m* dans la même portion AM. Donc la portion HF de la caustique HFN sera égale à BM — BA + MF — AH.

Il peut arriver différens cas, selon que le rayon incident BA est plus grand ou moindre que BM, & que le réfléchi AH développe ou enveloppe la portion HF pour parvenir en MF: mais l'on prouvera toujours, comme l'on vient de faire, que la différence des rayons incidens est égale à la différence des rayons réfléchis, en joignant à l'un d'eux la portion de la caustique qu'il développe, avant que de tomber sur l'autre. Par exemple, BM — BA (*Fig.* 95. *Pl.* 5.) = MF + FH — AH; d'où l'on tire FH = BM — BA + AH — MF.

Si l'on décrit du centre B l'arc de cercle A*p*; (*Fig.* 94. 95. *Pl.* 5.) il est clair que *p*M sera la différence des rayons incidens BM, BA. Et si l'on suppose que le point lumineux B devienne infiniment éloigné de la courbe AMD; (*Fig.* 96. *Pl.* 5.) les rayons incidens BA, BM deviendront paralleles, & l'arc AP deviendra une ligne droite perpendiculaire sur ces rayons.

COROLLAIRE. II.

111. Si l'on conçoit que la figure BAMD (*Fig.* 94. *Pl.* 5.) soit renversée sur le même plan, ensorte que le point B tombe sur le point I, & qu'ainsi la tangente en A de la courbe AMD dans sa premiere situation, la touche encore dans cette nouvelle; & qu'on fasse rouler la courbe *a*M*d* sur AMD, c'est-à-dire, sur elle-même, ensorte que les portions *a*M, AM soient toujours égales: je dis le point B décrira dans ce mouvement une espece de roulette ILK qui aura pour développée la caustique HFN.

Car il suit de la génération, 1°. Que la ligne LM tirée du point décrivant L au point touchant M sera (*Art.* 43.) perpendiculaire à la courbe ILK. 2°. Que L*a* ou IA = BA, & LM = BM. 3°. Que les angles faits par les droites ML, BM sur la tangente commune en M sont égaux; & partant que si l'on prolonge LM en F, le rayon MF sera le réfléchi de l'incident BM. D'où l'on voit que la perpendiculaire LF touche la caustique HFN: & comme cela arrive toujours en quelque endroit qu'on prenne le point L, il s'ensuit que la courbe ILK est formée par le développement de la caustique HFN, plus la droite HI.

Il suit de ceci que la portion FH ou FL — HI = BM + MF — BA — AH. Ce que l'on vient de démontrer d'une autre manière dans le Corollaire précédent.

COROLLAIRE III.

112. Si la tangente DN devient infiniment proche de la tangente FM ; il eſt clair que le point touchant N, & celui d'interſection V ſe confondront avec l'autre point touchant F : de ſorte que pour trouver le point F où le rayon réfléchi MF touche la cauſtique HFN, il ne faut que chercher le point de concours des rayons réfléchis infiniment proches MF, *m*F. Et en effet, ſi l'on imagine une infinité de rayons d'incidence infiniment proches les uns des autres, on verra naître par les interſections des réfléchis un poligone d'une infinité de côtés dont l'aſſemblage compoſera la cauſtique HFN.

PROPOSITION I.

PROBLÉME GÉNÉRAL.

113. *La nature de la courbe* AMD, (*Fig.* 97. *Pl.* 5.) *le point lumineux* B, *& le rayon incident* BM *étant donnés ; trouver ſur le réfléchi* MF *donné de poſition, le point* F *où il touche la cauſtique.*

Ayant trouvé par la ſection précédente la longueur MC du rayon de la développeé au point M, & pris l'arc M*m* infiniment petit, on tirera les droites B*m*, C*m*, F*m* ; on décrira des centres B, F les petits arcs MR, MO ; on menera les perpendiculaires CE, C*e*, CG, C*g* ſur les rayons incidens & réfléchis ; enſuite on nommera les données BM, *y* ; ME ou MG, *a*.

Cela posé, on prouvera, comme dans le Corollaire premier (*Art.* 110.), que les triangles MRm, MOm sont semblables & égaux ; & qu ainsi MR = MO. Or à cause de l'égalité des angles d'incidence & de réflexion, l'on a aussi CE = CG, Ce = Cg ; & partant CE — Ce ou EQ = CG — Cg ou SG. Donc à cause des triangles semblables BMR & BEQ, FMO & FGS, l'on aura BM + BE ($2y - a$). BM (y) : : MR + EQ ou MO + GS. MR ou MO : : MG (a). MF $= \frac{ay}{2y-a}$.

Si le point lumineux B tomboit de l'autre côté du point E par rapport au point M, ou (ce qui est la même chose) si la courbe AMD étoit convexe vers le point lumineux B ; y deviendroit négative de positive qu'elle étoit, & l'on auroit par conséquent MF $= \frac{-ay}{-2y-a}$ ou $\frac{ay}{2y+a}$.

Si l'on suppose que y devienne infinie, c'est-à-dire, que le point B (*Fig.* 96. *Pl.* 5.) soit infiniment éloigné de la courbe AMD ; les rayons incidens seront paralleles entr'eux, & l'on aura MF $= \frac{1}{2}a$, parce que a est nulle par rapport à $2y$.

COROLLAIRE I.

114. COMME l'on ne trouve pour MF (*Fig.* 94. 95. *Pl.* 5.) qu'une seule valeur dans laquelle entre le rayon de la développée ; il s'ensuit qu'une ligne courbe AMD ne peut avoir qu'une seule caustique HFN par réfléxion, puisqu'elle (*Art.* 80.) n'a qu'une seule développée.

COROLLAIRE. II.

115. LORSQUE AMD (*Fig.* 97. *Pl.* 5.) eſt géometrique, il eſt clair (*Art* 85.) que ſa développée l'eſt auſſi, c'eſt-à-dire, que l'on trouve géométriquement tous les points C. D'où il ſuit que tous les points F de ſa cauſtique ſeront auſſi déterminés géométriquement, c'eſt-à-dire, que la cauſtique HFN (*Fig.* 94. 95.) ſera géométrique. Mais je dis de plus, que cette cauſtique ſera toujours rectifiable; puſqu'il eſt évident (*Art.* 110. que l'on peut trouver avec le ſecours de la courbe AMD, qu'on ſuppoſe géométrique, des lignes droites égales à une de ſes portions quelconques.

COROLLAIRE III.

116. SI la courbe AMD (*Fig.* 97. *Pl.* 5.) eſt convexe vers le point lumineux B; la valeur de MF ($\frac{ay}{2y+a}$) ſera toujours poſitive; & il faudra prendre par conſéquent le point F du côté du point C, par rapport au point M, comme l'on a ſuppoſé en faiſant le calcul. D'où l'on voit que les rayons réfléchis infiniment proches ſeront divergens.

Mais ſi la courbe AMD eſt concave vers le point lumineux B, la valeur de MF ($\frac{ay}{2y-a}$) ſera poſitive lorſque y ſurpaſſe $\frac{1}{2}a$, négative lorſqu'il eſt moindre, & infinie lorſqu'il eſt égal. D'où il ſuit que ſi l'on décrit un cercle qui ait

pour diamètre la moitié du rayon MC de la développée, les rayons réfléchis infiniment proches seront convergens lorsque le point lumineux B tombe au dehors de sa circonférence, divergens lorsqu'il tombe au dedans, & enfin paralleles lorsqu'il tombe dessus.

COROLLAIRE IV.

117. Si le rayon incident BM touche la courbe AMD au point M, l'on aura ME $(a) = o$; & partant MF $= o$. Or comme le rayon réfléchi est alors dans la direction de l'incident, & que la nature de la caustique consiste à toucher tous les rayons réfléchis; il s'ensuit qu'elle touchera aussi le rayon incident BM au point M: c'est-à-dire, que la caustique & la donnée auront la même tangente dans le point M qui leur sera commun.

Si le rayon MC de la développée est nul, on aura encore ME $(a) = o$; & partant MF $= o$. D'où l'on voit que la donnée & la caustique font entr'elles dans le point M qui leur est commun, un angle égal à l'angle d'incidence.

Si le rayon CM de la développée est infini, le petit arc Mm deviendra une ligne droite, & l'on aura MF $= \mp y$; puisque ME (a) étant infinie, y sera nul par rapport à a. Or comme cette valeur est négative lorsque le point B tombe du côté du point C par rapport à la ligne AMD, & positive lorsqu'il tombe du côté opposé; il s'ensuit que les rayons réfléchis infiniment pro-

ches seront toujours divergens lorsque la ligne AMD est droite.

COROLLAIRE V.

118. Il est évident que deux quelconques des trois points B, C, F, étant donnés, on trouvera facilement le troisieme.

Soit, 1°, la courbe AMD (*Fig.* 98. *Pl.* 5.) une parabole qui ait pour foyer le point lumineux B. Il est clair par les élémens des sections coniques, que tous les rayons réfléchis seront paralleles à l'axe ; & partant que MF sera toujours infinie en quelque endroit que l'on suppose le point M. On aura donc $a = 2y$: d'où il suit que si l'on prend ME double de MB, qu'on mene la perpendiculaire EC ; elle ira couper MC perpendiculaire à la courbe AMD, en un point C qui sera à la développée de cette courbe.

Soit, 2°, la courbe AMD (*Fig.* 99. *Pl.* 5.) une ellipse qui ait pour un de ses foyers le point lumineux B. Il est encore clair que tous les rayons réfléchis MF se rencontreront dans un même point F qui sera l'autre foyer. Et si l'on nomme MF, z ; l'on aura (*Art.* 113.) $z = \frac{ay}{2y-a}$; d'où l'on tire la cherchée ME $(a) = \frac{2yz}{y+z}$. Mais si la courbe AMD est une hyperbole, le foyer F tombera de l'autre côté ; & partant MF (z) deviendra négative : d'où il suit qu'on aura alors ME $(a) = \frac{-2yz}{y-z}$ ou $\frac{2yz}{z-y}$. Ce qui donne cette construction qui sert aussi pour l'ellipse.

Soit priſe M E (*Fig.* 99. *Pl.* 5. *Fig.* 100. *Pl.* 6.) quatrieme proportionnelle au demi-axe traverſant, & aux rayons incident & réfléchi ; ſoit menée la perpendiculaire E C : elle ira couper la ligne M C perpendiculaire à la ſection, en un point C qui ſera à la développée.

EXEMPLE I.

119. SOIT la courbe A M D (*Fig.* 101. *Pl.* 6.) une parabole, dont les rayons incidens P M ſoient perpendiculaires ſur ſon axe A P. Il faut trouver ſur les réfléchis M F les points F où ils touchent la cauſtique A F K.

Il eſt clair que ſi l'on mene le rayon M C de la développée, & qu'on tire la perpendiculaire C G ſur le rayon réfléchi M F, il faudra (*Art.* 113.) prendre M F égale à la moitié de M G. Mais cette conſtruction ſe peut abréger, en conſiderant que ſi l'on mene M N parallele à l'axe A P, & la droite M L au foyer L ; les angles L M P, F M N ſeront égaux, puiſque par la proprieté de la parabole L M Q = Q M N, & par la ſuppoſition P M Q = Q M F. Si donc l'on ajoute de part & d'autre le même angle P M F, l'angle L M F ſera égal à l'angle P M N, c'eſt-à-dire, droit. Or l'on vient de démontrer (*Art.* 118. *num.* 1.) que L H perpendiculaire ſur M L rencontre le rayon M C de la développée en ſon milieu H. Si donc l'on mene M F parallele & égale à L H, elle ſera un des rayons réfléchis, & touchera en F la cauſtique A F K. Ce qu'il falloit trouver.

Si l'on ſuppoſe que le rayon réfléchi M F ſoit parallele à l'axe A P, il eſt évident que le point F de la cauſtique ſera le plus éloigné qu'il eſt poſſible de l'axe A P, puiſque la tangente en ce point ſera parallele à l'axe. Afin donc de déterminer ce point dans toutes les cauſtiques, telles que AFK, formées par des rayons incidens perpendiculaires à l'axe de la courbe donnée, il n'y a qu'à conſidérer que M P doit être alors égale à PQ. Ce qui donne $dy = dx$. Soit $ax = yy$, on aura $dy = \frac{adx}{2\sqrt{ax}} = dx$, d'où l'on tire A P $(x) = \frac{1}{4}a$: c'eſt-à-dire, que ſi le point P tombe au foyer L, le rayon réfléchi M F ſera parallele à l'axe. Ce qui eſt d'ailleurs viſible; puiſque dans ce cas M P ſe confondant avec L M, il faut auſſi que M F ſe confonde avec M N, & L H avec L Q. D'où l'on voit que M F eſt alors égale à M L; & partant que ſi l'on mene F R perpendiculaire ſur l'axe, on aura A R ou A L + M F $= \frac{3}{4}a$. On voit auſſi que la portion A F de la cauſtique eſt égale en ce cas au paramètre, puiſqu'elle eſt toujours (*Art.* 110.) égale à P M + M F.

Pour déterminer le point K où la cauſtique A F K rencontre l'axe A P, il faut chercher la valeur de M O, & l'égaler à celle de M F; car il eſt viſible que le point F tombant en K, les lignes M F, M O deviennent égales entr'elles. Nommant donc l'inconnue M O, t; l'angle P M O coupé en deux également par M Q perpendiculaire à la courbe, donnera M P (y). M O (t)

$::$ PQ $(\frac{ydy}{dx})$. OQ $= \frac{tdy}{dx}$. Et partant OP $= \frac{tdy+ydy}{dx} = \sqrt{tt-yy}$, à cauſe du triangle rectangle MPO; & diviſant de part & d'autre par $t+y$, on trouve $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{t-y}{t+y}}$, d'où l'on tire MO $(t) = \frac{ydx^2+ydy^2}{dx^2-dy^2} =$ MF $(\frac{1}{2}a) = \frac{dx^2+dy^2}{-2ddy}$, puiſque (*Art.* 77.) ME $(a) = \frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$. Ce qui donne $dy^2 - 2yddy = dx^2$ qui ſervira à trouver le point P, tel que menant le rayon incident PM & le réfléchi MF, ce dernier touche la cauſtique AFK au point K où elle rencontre l'axe AP.

On a dans la parabole $y = x^{\frac{1}{2}}$, $dy = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$, $ddy = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}dx^2$; & mettant ces valeurs dans l'équation précédente, on trouve $\frac{1}{4}x^{-1}dx^2 + \frac{1}{2}x^{-1}dx^2 = dx^2$; d'où l'on tire AP $(x) = \frac{3}{4}$ du paramètre.

Pour trouver la nature de la cauſtique AFK à la maniere de *Deſcartes*, il faut chercher une équation qui exprime la relation de la coupée AR (u), à l'appliquée RF (z); ce qui ſe fait en cette ſorte. Puiſque MO $(t) = \frac{ydx^2+ydy^2}{dx^2-dy^2}$, l'on aura PO $(\frac{tdy+ydy}{dx}) = \frac{2ydxdy}{dx^2-dy^2}$; & à cauſe des triangles ſemblables MPO, MSF, on

formera ces proportions MO $\left(\frac{ydx^2+ydy^2}{dx^2-dy^2}\right)$. MF $\left(\frac{dx^2+dy^2}{-2ddy}\right)$ ou $-2yddy \,.\, dx^2 - dy^2 :: \text{MP}\,(y)$ $.\,\text{MS}\,(y-z) = \frac{dx^2-dy^2}{-2ddy} :: \text{PO}\left(\frac{2ydxdy}{dx^2-dy^2}\right)$. SF ou PR $(u-x) = \frac{dxdy}{-ddy}$. On aura donc ces deux équations $z = y + \frac{dy^2-dx^2}{-2ddy}$, & $u = x + \frac{dxdy}{-ddy}$, qui ſerviront avec celle de la courbe donnée à en former une nouvelle où x & y ne ſe trouveront plus, & qui exprimera par conſéquent la relation de AR (u) à FR (z).

Lorſque la courbe AMD eſt une parabole, comme l'on a ſuppoſé dans cet exemple, on trouvera $z = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}}$, ou (en quarrant chaque membre) $\frac{9}{4}x - 6xx + 4x^3 = zz$, & $u = 3x$; d'où l'on tire l'équation cherchée $azz = \frac{4}{27}u^3 - \frac{2}{3}auu + \frac{3}{4}aau$ qui exprime la nature de la cauſtique AFK. On peut remarquer que PR eſt toujours double de AP, puiſque AR $(u) = 3x$; ce qui fournit encore une nouvelle manière de déterminer ſur le rayon réfléchi MF le point cherché F.

EXEMPLE II.

120. SOIT la courbe AMD (*Fig.* 102. *Pl.* 6.) un demi-cercle qui ait pour diamètre la ligne AD, & pour centre le point C; ſoient les rayons incidens PM perpendiculaires ſur AD.

Comme la développée du cercle se réunit en un seul point qui en est le centre, il s'ensuit (*Art.* 113.) que si l'on coupe le rayon CM en deux également au point H, & qu'on mene HF perpendiculaire sur le rayon réfléchi MF, il coupera ce rayon en un point F, où il touche la caustique AFK. Il est clair que le rayon réfléchi MF est égal à la moitié de l'incident PM; d'où il suit, 1°. Que le point P tombant en C, le point F tombe en K, milieu de CB. 2°. Que la portion AF est triple de MF, & la caustique AFK triple de BK. On voit aussi que si l'on fait l'angle ACM demi-droit, le rayon réfléchi MF sera parallele à AC; & partant que le point F sera plus élevé au dessus du diamètre AD, que tout autre point de la caustique.

Le cercle qui a pour diamètre MH, passe par le point F; puisque l'angle HFM est droit. Et si l'on décrit du centre C & du rayon CK ou CH, moitié de CM, le cercle KHG; l'arc HF sera égal à l'arc HK: car l'angle CMF étant égal à CMP ou HCK, les arcs $\frac{1}{2}$HF, HK qui mesurent ces angles dans les cercles MFH, KHG, seront entr'eux comme les rayons $\frac{1}{2}$MH, HC de ces cercles. D'où l'on voit que la caustique AFK est une roulette formée par la révolution du cercle mobile MFH autour de l'immobile KHG, dont l'origine est en K, & le sommet en A.

EXEMPLE III.

121. SOIT la courbe AMD (*Fig.* 103. *Pl.* 6.) un cercle qui ait pour diamètre la ligne AD, & pour centre le point C; soit le point lumineux A, d'où partent tous les rayons incidens AM, l'une des extrêmités de ce diamètre.

Si l'on mene du centre C sur le rayon incident AM la perpendiculaire CE: il est clair par la propriété du cercle, que le point E coupe en deux parties égales la corde AM; & qu'ainsi ME (a) $= \frac{1}{2}y$. On aura donc MF ($\frac{ay}{2y-a}$) $= \frac{1}{3}y$: c'est-à-dire, qu'il faut prendre le rayon réfléchi MF égal au tiers de l'incident AM. D'où l'on voit que DK $= \frac{1}{3}$ AD, CK $= \frac{1}{3}$ CD, & que (*Art.* 110.) la caustique AFK $= \frac{4}{3}$ AD, de même que sa portion AF $= \frac{4}{3}$ AM. Si l'on prend AM $=$ AC, le rayon réfléchi MF sera parallele au diamètre AD; & par conséquent le point F sera le plus élevé qu'il soit possible au-dessus de ce diamètre.

Si l'on prend CH $= \frac{1}{3}$ CM, & qu'on tire HF perpendiculaire sur MF; le point F sera à la caustique: car menant HL perpendiculaire sur AM, il est clair que ML $= \frac{2}{3}$ ME $= \frac{1}{3}$ AM, puisque MH $= \frac{2}{3}$ CM. Le cercle qui a pour diamètre MH, passera donc par le point F de la caustique; & si l'on décrit un autre cercle KHG du centre C, & du rayon CK ou CH, il lui sera égal, & l'arc HK sera égal à l'arc HF:

car dans le triangle iſoſcele CMA l'angle externe KCH = 2CMA = AMF ; & partant les arcs HK, HF meſures de ces angles dans des cercles égaux, ſeront auſſi égaux. D'où il ſuit que la cauſtique AFK eſt encore une roulette décrite par la révolution du cercle mobile MFH autour de l'immobile KHG, dont l'origine eſt en K, & le ſommet en A.

On pourroit encore prouver ceci de cette autre maniére. Si l'on décrit une roulette par la révolution d'un cercle égal au cercle AMD autour de celui-ci, en commençant au point A; l'on a démontré dans la Corollaire ſecond (*Art.* 111.) qu'elle aura pour développée la cauſtique AFK. Or (*Art.* 100.) cette développée eſt une roulette de même eſpece, c'eſt-à-dire, que les diamètres des cercles générateurs en ſeront égaux; & on déterminera le point K en prenant CK troiſiéme proportionnelle à CD + DA & à CD, c'eſt-à-dire, égale à $\frac{1}{3}$ CD. Donc, &c.

EXEMPLE IV.

122. SOIT la courbe AMD (*Fig.* 104. *Pl.* 6.) une demi-roulette ordinaire décrite par la révolution du demi-cercle NGM ſur la droite BD, dont le ſommet eſt en A, & l'origine en D; ſoient les rayons incidens KM paralleles à l'axe AB.

Puiſque (*Art.* 95.) MG eſt égale à la moitié du rayon de la développée, il s'enſuit (*Art.* 113.) que ſi l'on mene GF perpendiculaire ſur le rayon

réfléchi MF, le point F ſera à la cauſtique DFB. D'où l'on voit que MF doit être priſe égale à KM.

Si l'on mene du centre H du cercle générateur MGN au point touchant G, & au point décrivant M, les rayons HG, HM; il eſt clair que HG ſera perpendiculaire ſur BD, & que l'angle GMH = MGH = GMK : d'où l'on voit que le rayon réfléchi MF paſſe par le centre H. Or le cercle qui a pour diamètre GH, paſſe auſſi par le point F, puiſque l'angle GFH eſt droit. Donc les arcs GN, $\frac{1}{2}$GF, meſures du même angle GHN, ſeront entr'eux comme les diamètres MN, GH de leurs cercles; & partant l'arc GF = GN = GB. Il eſt donc évident que la cauſtique DFB eſt une roulette décrite par la révolution entiere du cercle GFH ſur la droite BD.

EXEMPLE V.

123. SOIT encore la courbe AMD (*Fig.* 165. *Pl.* 6.) une demi-roulette ordinaire, dont la baſe BD eſt égale à la demi-circonférence ANB du cercle générateur. Et ſoient à préſent les rayons incidens PM paralleles à la baſe BD.

Si l'on mene GQ perpendiculaire ſur PM, les triangles rectangles GQM, BPN ſeront égaux & ſemblables; & partant MQ = PN. D'où l'on voit (*Art.* 95. 113.) qu'il faut prendre MF égale à l'appliquée correſpondante PN dans le demi-cercle générateur ANB.

Afin que le point F ſoit le plus éloigné qu'il

est possible de l'axe A B, il faut que la tangente M F en ce point soit parallele à cet axe. L'angle P M F sera donc alors droit, sa moitié P M G ou P N B demi-droit ; & partant le point P tombera dans le centre du cercle A N D.

C'est une chose digne de remarque, que le point P approchant ensuite continuellement de l'extrêmité B, le point F approche aussi de l'axe A B jusqu'à un certain point K, après quoi il s'en éloigne jusqu'en D ; de sorte que la caustique A F K F D a un point de rebroussement en K.

Pour le déterminer, je remarque (*Art.* 110. 111.) que la portion AF $=$ P M $+$ M F, la portion A F K $=$ H L $+$ L K, & la portion K F de la partie K F D, est $=$ H L $+$ L K $-$ P M $-$ M F : d'où l'on voit que H L $+$ L K doit être un *plus grand*. C'est pourquoi nommant A H, x ; H I, y ; l'arc A I, u ; l'on aura H L $+$ L K $= u + 2y$, dont la différence donne $du + 2dy = o$, & $\frac{adx}{y} + 2dy = o$, en mettant pour du sa valeur $\frac{adx}{y}$: d'où l'on tire $adx = -2ydy = 2xdx - 2adx$ à cause du cercle ; & partant A H $(x) = \frac{3}{2} a$.

COROLLAIRE.

124. L'ESPACE A F M ou A F K F M renfermé par les portions de courbes A F ou A F K F, A M, & par le rayon réfléchi M F, est égal à la moitié de l'espace circulaire A P N. Car sa différence, qui est le secteur F M O, est égale à la moitié du rectangle P p S N, différence de

l'eſpace APN ; puiſque les triangles rectangles MOm, MRm étant égaux & ſemblables, MO ſera égale à MR ou NS ou Pp, & que de plus MF = PN.

EXEMPLE VI.

125. SOIT la courbe AMD (*Fig.* 106. *Pl.* 6.) une demi-roulette formée par la révolution du cercle MGN autour de ſon égal AGK, dont l'origine eſt en A, & le ſommet en D ; ſoient les rayons incidens AM qui partent tous du point A. La ligne BH qui joint les centres des deux cercles générateurs, paſſe continuellement par le point touchant G, & les arcs GM, GA comme auſſi leurs cordes, ſont toujours égaux ; ainſi l'angle HGM = BGA, & l'angle GMA = GAM. Or l'angle HGM + BGA = GMA + GAM ; puiſqu'ajoutant de part & d'autre le même angle AGM, on en forme deux droits. Donc l'angle HGM ſera toujours égal à l'angle GMA ; & partant auſſi à l'angle de réfléxion GMF : d'où il ſuit que MF paſſe toujours par le centre H du cercle mobile.

Maintenant ſi l'on mene les perpendiculaires CE, GO ſur le rayon incident AM : il eſt clair que MO = OA, & que OE = $\frac{1}{3}$ OM ; puiſque (*Art.* 100.) le point C étant à la dévelop-pée, GC = $\frac{1}{3}$ GM. On aura donc ME = $\frac{2}{3}$ AM, c'eſt-à-dire, $a = \frac{2}{3} y$; & par conſéquent MF $\left(\frac{ay}{2y - a}\right) = \frac{1}{2} y$: d'où l'on voit que ſi l'on mene GF perpendiculaire ſur MF, le point F ſera à la cauſtique AFK.

Le cercle qui a pour diamètre GH, passe par le point F; & les arcs GM, $\frac{1}{2}$ GF, mesures du même angle GHM, étant entr'eux comme les diamètres MN, GH de leurs cercles, l'arc GF sera égal à l'arc GM, & par conséquent à larc GA. D'où il est évident que la caustique AFK est une roulette décrite par la révolution du cercle mobile HFG autour de l'immobile AGK.

COROLLAIRE.

126. Si l'on décrit un cercle qui ait pour centre le point B, & pour rayon une droite égale à BH ou AK; & qu'il y ait une infinilé de droites paralleles à BD qui tombent sur sa circonférence; il est visible (*Art.* 120.) qu'elles formeront en se réfléchissant la même caustique AFK.

EXEMPLE VII.

127. Soit la courbe AMD (*Fig.* 107. *Pl.* 6.) une logarithmique spirale, avec les rayons incidens AM qui partent tous du centre A.

Si l'on mene par l'extrêmité C du rayon de la développée la droite CA perpendiculaire sur le rayon incident AM, elle rencontrera (*Art.* 91.) dans le centre A. C'est pourquoi AM (y) $= a$; & partant MF ($\frac{ay}{2y - a}$) $= y$. Le triangle AMF sera donc isoscele; & comme les angles d'incidence & de réfléxion AMT, FMS sont égaux entr'eux, il s'ensuit que l'angle AFM est égal à l'angle AMT. D'où il est clair que la caustique

AFK ſera une logarithmique ſpirale qui ne differera de la propoſée AMD que par ſa poſition.

PROPOSITION II.

Probléme.

128. L*a cauſtique* HF (*Fig.* 108. *Pl.* 6.) *par réfléxion étant donnée avec le point lumineux* B; *trouver une infinité de courbes, telles que* AM, *dont elle ſoit cauſtique par réfléxion.*

Ayant pris à diſcrétion ſur une tangente quelconque HA le point A pour un des points de la courbe cherchée AM; on décrira du centre B, de l'intervalle BA, l'arc de cercle AP, & d'un autre intervalle quelconque BM, un autre arc de cercle. Et ayant pris $AH + HE = BM - BA$ ou PM, on développera la cauſtique HF en commençant au point E; & l'on décrira dans ce mouvement une ligne courbe EM qui coupera l'arc de cercle décrit du rayon BM, en un point M qui ſera (*Art.* 110.) à la courbe AM. Car par conſtruction $PM + MF = AH + HF$.

Ou bien ayant attaché un fil BMF par ſes extrêmités en B & en F, on fera tendre ce fil par le moyen d'un ſtile placé en M, que l'on fera mouvoir, enſorte que l'on enveloppera par la partie MF de ce fil la cauſtique HF; il eſt clair que ce ſtile décrira dans ce mouvement la courbe cherchée MA.

AUTRE SOLUTION.

129. AYANT tiré à diſcrétion une tangente FM autre que HA, on cherchera ſur elle un point M, telle que BM + MF = BA + AH + HF. Ce qui ſe fera en cette ſorte.

Soit priſe FK = BA + AH + HF, & diviſant BK par le milieu en G, ſoit tirée la perpendiculaire GM : elle rencontrera la tangente FM au point cherché M. Car BM = MK.

Si le point B (*Fig.* 109. *Pl.* 6.) étoit infiniment éloigné de la courbe AM, c'eſt-à-dire, que les rayons incidens BA, BM fuſſent paralleles à une ligne droite donnée de poſition; la premiere conſtruction auroit toujours lieu, en conſidérant que les arcs de cercles décrits du centre B deviennent des lignes droites perpendiculaires ſur les rayons incidens. Mais cette derniere deviendroit inutile; c'eſt pourquoi il faudroit lui ſubſtituer celle qui ſuit.

Soit priſe FK = AH + HF. Ayant trouvé le point M tel que MP parallele à AB perpendiculaire ſur AP, ſoit égale à MK : il eſt clair (*Art.* 110.) que ce point ſera à la courbe cherchée AM; puiſque PM + MF = AH + HF. Or cela ſe fait ainſi.

Soit menée KG perpendiculaire ſur AP; & ayant pris KO = KG, ſoient tirées KP parallele à OG, & PM parallele à GK : je dis que le point M ſera celui qu'on cherche. Car à cauſe des triangles ſemblables GKO, PMK, l'on aura PM = MK; puiſque GK = KO.

Si la cauſtique HF ſe réuniſſoit en un point, la courbe AM deviendroit une ſection conique.

COROLLAIRE I.

130. Il eſt clair que la courbe qui paſſe par tous les points K, eſt formée par le développement de la courbe HF en commençant en A, & qu'elle change de nature à meſure que le point A change de place ſur la tangente AH. Donc puiſque les courbes AM naiſſent toutes de ces courbes par la même conſtruction, qui eſt géométrique; il s'enſuit (*Art.* 108.) qu'elles ſont d'une nature différente entr'elles, & qu'elles ne ſont géométriques que lorſque la cauſtique HF eſt géométrique & rectifiable.

COROLLAIRE II.

131. Une ligne courbe DN (*Fig.* 110. *Pl.* 6.) étant donnée avec un point lumineux C; trouver une infinité de lignes telles que AM, enſorte que les rayons réfléchis DA, NM ſe réuniſſent en un point donné B, après s'être réfléchis de nouveau à la rencontre de ces lignes AM.

Si l'on imagine que la courbe HF ſoit la cauſtique de la donnée DN, formée par le point lumineux C; il eſt clair que cette ligne HF doit être auſſi la cauſtique de la courbe AM ayant pour point lumineux le point donné B; de ſorte que $FK = BA + AH + HF$, & $NK = BA + AH + HF + FN = BA + AD + DC$

— CN, puiſque (*Art.* 110.) HD + DC = HF + FN + NC. Ce qui donne cette conſtruction.

Ayant pris à diſcrétion ſur un rayon réfléchi quelconque le point A pour un des points de la courbe cherchée AM, on prendra ſur un autre rayon réfléchi NM, tel qu'on voudra, la partie NK = BA + AD + DC — CN; & l'on trouvera le point cherché M comme ci-deſſus, art. 129. (*Conſultez la Note cinquante-unieme.*)



SECTION VII.

Usage du Calcul des différences pour trouver les Caustiques par réfraction.

DÉFINITION.

SI l'on conçoit qu'une infinité de rayons BA, BM, BD, (*Fig.* 111. *Pl.* 6.) qui partent d'un même point lumineux B, se rompent à la rencontre d'une ligne courbe AMD, en s'approchant ou s'éloignant de ses perpendiculaires MC, ensorte que les sinus CE des angles d'incidence CME, soient toujours aux sinus CG des angles de réfraction CMG, en même raison donnée de *m* à *n*; la ligne courbe HFN que touchent tous les rayons rompus ou leurs prolongemens AH, MF, DN (*Fig.* 112. *Pl.* 6.) est appellée *Caustique par réfraction*.

COROLLAIRE.

132. SI l'on enveloppe la caustique HFN en commençant au point A, l'on décrira la courbe ALK telle que la tangente LF plus la portion FH de la caustique sera continuellement égale à la même droite AH. Et si l'on conçoit une autre tangente F*ml* infiniment proche de FML, avec un autre rayon d'incidence B*m*, & qu'on décrive des centres F, B, les petits arcs MO, MR : on formera deux petits triangles rectangles MR*m*,

MOm qui ſeront ſemblables aux deux autres MEC, MGC, chacun à chacun ; puiſque ſi l'on ôte des angles droits RME, CMm le même angle EMm, les angles reſtans RMm, EMC ſeront égaux ; & de même ſi l'on ôte des angles droits GMO, CMm le même angle GMm, les reſtans OMm, GMC ſeront égaux. C'eſt pourquoi Rm. Om : : CE. CG : : m. n. Or puiſque Rm eſt la différence de BM, & Om celle de LM; il s'enſuit (*Art.* 96.) que BM — BA ſomme de toutes les différences Rm dans la portion de courbe AM, eſt à ML ou AH — MF — FH ſomme de toutes les différences Om dans la même portion AM, comme m eſt à n ; & partant que la portion $FH = AH - MF + \frac{n}{m} BA - \frac{n}{m} BM$.

Il peut arriver différens cas, ſelon que le rayon incident BA eſt plus grand ou moindre que BM, & que le rompu AH enveloppe ou développe la portion HF : mais on prouvera toujours, comme l'on vient de faire, que la différence des rayons incidens eſt à la différence des rayons rompus (en joignant à l'un d'eux la portion de la cauſtique qu'il développe avant que de tomber ſur l'aut.e) comme m eſt à n. Par exemple, (*Fig.* 112. *Pl.* 6.) BA — BM. AH — MF — FH : : m. n. d'où l'on tire $FH = AH - MF + \frac{n}{m} BM - \frac{n}{m} BA$.

Si l'on décrit du centre B (*Fig.* 111. *Pl.* 6.) l'arc de cercle AP ; il eſt clair que PM ſera la

différence des rayons incidens BM, BA. Et ſi l'on ſuppoſe que le point lumineux B devienne infiniment éloigné de la courbe AMD, les rayons incidens BA, BM deviendront paralleles, & l'arc AP deviendra une ligne droite perpendiculaire ſur ces rayons.

PROPOSITION I.

PROBLÉME GÉNÉRAL.

133. *La nature de la courbe* AMD, (*Fig.* 111. *Pl.* 6.) *le point lumineux* B, *& le rayon incident* BM *étant donnés; trouver ſur le rayon rompu* MF *donné de poſition, le point* F *où il touche la cauſtique par réfraction.*

Ayant trouvé (*Sect.* 5.) la longueur MC du rayon de la développée au point donné M, & pris l'arc M*m* infiniment petit, on tirera les droites B*m*, C*m*, F*m*; on décrira des centres B, F, les petits arcs MR, MO; on menera les perpendiculaires CE, C*e*, CG, C*g* ſur les rayons incidens & rompus; & l'on nommera les données BM, y; ME, a; MG, b; & le petit arc MR, dx. Cela poſé,

Les triangles rectangles ſemblables MEC & MR*m*, MGC & MO*m*, BMR & BQ*e*, donneront ME(a). MG(b) : : MR(dx). MO $= \frac{bdx}{a}$. Et BM(y). BQ ou BE($y+a$) : : MR (dx). Q*e* $= \frac{adx + ydx}{y}$. Or par la propriété de la réfraction C*e*. C*g* : : CE. CG : : m. n. Et

partant $m . n :: Ce - CE$ ou $Qe \left(\frac{adx + ydx}{y}\right)$. $Cg - CG$ ou $Sg = \frac{andx + nydx}{my}$. Donc à cauſe des triangles rectangles ſemblables FMO & FSg, l'on aura $MO - Sg \left(\frac{bmydx - anydx - aandx}{amy}\right)$. $MO\left(\frac{bdx}{a}\right) :: MS$ ou $MG(b) . MF = \frac{bbmy}{bmy - any - aan}$. Ce qui donne cette conſtruction.

Soit fait vers CM (*Fig.* 113. *Pl.* 6.) l'angle $ECH = GCM$, & ſoit priſe vers B, $MK = \frac{aa}{y}$. Je dis que ſi l'on fait $HK . HE :: MG . MF$. le point F ſera à la cauſtique par réfraction.

Car à cauſe des triangles ſemblables CGM, CEH, l'on aura $CG . CE :: n . m :: MG(b)$. $EH = \frac{bm}{n}$. D'où l'on tire $HE - ME$ ou $HM = \frac{bm - an}{n}$, $HM - MK$ ou $HK = \frac{bmy - any - aan}{ny}$; & partant $HK\left(\frac{bmy - any - aan}{ny}\right) . HE\left(\frac{bm}{n}\right) ::$ $MG(b) . MF = \frac{bbmy}{bmy - any - aan}$.

Il eſt clair que ſi la valeur de HK eſt négative, celle de MF le ſera auſſi : d'où il ſuit que le point M tombe entre les points G, F, lorſque le point H ſe trouve entre les points K, E.

Si le point lumineux B (*Fig.* 111. 113. *Pl.* 6.) tomboit du côté du point E, ou (ce qui eſt la même choſe) ſi la courbe AMD étoit concave du

côté du point lumineux B; y deviendroit négative de positive qu'elle étoit auparavant, & l'on auroit par conséquent MF $= \frac{-bbmy}{-bmy+any-aan}$ ou $\frac{bbmy}{bmy-any+aan}$. Et la construction demeureroit la même.

Si l'on suppose que y devienne infinie: c'est-à-dire, que le point lumineux B soit infiniment éloigné de la courbe AMD; les rayons incidens seront paralleles entr'eux, & l'on aura MF $= \frac{bbm}{bm-an}$, parce que le terme aan sera nul par rapport aux deux autres bmy, any; & comme MK ($\frac{aa}{y}$) s'évanouit alors, il n'y aura qu'à faire HM . HE : : MG . MF.

COROLLAIRE. I.

134. ON démontrera, de même que dans les caustiques par réfléxion, (*Art.* 114. 115.) qu'une ligne courbe AMD n'a qu'une seule caustique par réfraction, la raison de m à n étant donnée; laquelle caustique est toujours géométrique & rectifiable, lorsque la courbe proposée AMD est géométrique

COROLLAIRE II.

135. SI le point E tombe de l'autre côté de la perpendiculaire MC par rapport au point G, & que CE soit égale à CG; il est clair que la caustique par réfraction se changera en caustique par

réfléxion. En effet on aura MF ($\frac{bbmy}{bmy - any + aan}$) $= \frac{ay}{2y \mp a}$; puiſque $m = n$, & que a devient négative de poſitive qu'elle étoit, & de plus égale à b. Ce qui s'accorde avec ce qu'on a démontré dans la ſection précédente.

Si m eſt infinie par rapport à n; il eſt clair que le rayon rompu MF tombera ſur la perpendiculaire CM : de ſorte que la cauſtique par réfraction deviendra la développée. En effet on aura MF $= b$, qui devient en ce cas MC : c'eſt-à-dire, que le point F tombera ſur le point C, qui eſt à la développée.

COROLLAIRE III.

136. SI la courbe AMD eſt convexe vers le point lumineux B, & que la valeur de MF ($\frac{bbmy}{bmy - any - aan}$) ſoit poſitive; il eſt clair qu'il faudra prendre le point F du même côté du point G, par rapport au point M, comme on l'a ſuppoſé en faiſant le calcul : & qu'au contraire ſi elle eſt négative, il le faudra prendre du côté oppoſé. Il en eſt de même lorſque la courbe AMD eſt concave vers le point B; mais il faut obſerver qu'on aura pour lors MF $= \frac{bbmy}{bmy - any + aan}$. D'où il ſuit que les rayons rompus infiniment proches ſont convergens, lorſque la valeur de MF eſt poſitive dans le premier cas, & négative dans le ſecond; & qu'au contraire ils ſont divergens

lorſqu'elle

lorsqu'elle est négative dans le premier cas, & positive dans le second. Cela posé; il est évident,

1°. Que si la courbe AMD est convexe vers le point lumineux B, & que m soit moindre que n; ou que si elle est concave vers ce point, & que m surpasse n: les rayons rompus infiniment proches seront toujours divergens.

2°. Que si la courbe AMD est convexe vers le point lumineux B, & que m surpasse n; ou que si elle est concave vers ce point, & que m soit moindre que n: les rayons rompus infiniment proches seront convergens, lorsque MK $(\frac{aa}{y})$ est moindre que MH $(\frac{bm}{n} - a$ ou $a - \frac{bm}{n})$; divergens, lorsqu'elle est plus grande; & paralleles, lorsqu'elle est égale. Or comme MK $= o$, lorsque les rayons incidens sont paralleles, il s'ensuit qu'en ce cas les rayons rompus infiniment proches seront toujours convergens.

COROLLAIRE IV.

137. Si le rayon incident BM touche la courbe AMD au point M, l'on aura ME $(a) = o$; & partant MF $= b$. Ce qui fait voir que le point F tombe alors sur le point G.

Si le rayon incident BM est perpendiculaire à la courbe AMD, les droites ME (a) & MG (b) deviendront égales chacune au rayon CM de la développée; puisqu'elles se confondent avec lui. On aura donc MF $= \frac{bmy}{my - ny \mp bn}$, qui de-

vient $\frac{bm}{m-n}$ lorſque les rayons incidens ſont paralleles entr'eux.

Si le rayon rompu MF touche la courbe AMD au point M, l'on aura MG (b) $=o$. D'où l'on voit que la cauſtique touche alors la courbe donnée au point M.

Si le rayon CM de la développée eſt nul; les droites ME (a), MG (b) ſeront auſſi égales à zero; & par conſéquent les termes aan, $bbmy$ ſont nuls par rapport aux autres bmy, any. D'où il ſuit que MF $=o$; & qu'ainſi la cauſtique a le point M commun avec la courbe donnée.

Si le rayon CM de la développée eſt infini; les droites ME (a), MG (b) ſeront auſſi infinies; & par conſéquent les termes bmy, any ſeront nuls par rapport aux autres aan, $bbmy$: de ſorte qu'on aura MF $=\frac{bbmy}{\mp aan}$. Or (*Art.* 133.) comme cette quantité eſt négative, lorſque l'on ſuppoſe que le point F tombe de l'autre côté du point B par rapport à la ligne AMD, & qu'au contraire elle eſt poſitive lorſqu'on ſuppoſe qu'il tombe du même côté; il s'enſuit (*Art.* 136.) que l'on doit prendre le point F du même côté du point B, c'eſt-à-dire, que les rayons rompus infiniment proches ſont divergens. Il eſt évident que le petit arc M*m* devient alors une ligne droite, & que la conſtruction précédente n'a plus de lieu. On peut lui ſubſtituer celle-ci, qui ſervira à déterminer les points des cauſtiques par réfraction, lorſque la ligne AMD eſt droite.

Ayant mené BO (*Fig.* 114. *Pl.* 6.) perpendiculaire ſur le rayon incident BM, & qui rencontre en O la droite MC perpendiculaire ſur AD; on tirera OL perpendiculaire ſur le rayon rompu MG; & ayant fait l'angle BOH égal à l'angle LOM, on fera BM.BH::ML.MF. Je dis que le point F ſera à la cauſtique par réfraction.

Car les triangles rectangles MEC & MBO, MGC & MLO ſeront toujours ſemblables de quelque grandeur que l'on ſuppoſe CM; & partant lorſqu'elle devient infinie, l'on aura encore ME(a).MG(b)::BM(y).ML$=\frac{by}{a}$. Et à cauſe des triangles ſemblables OLM, OBH, l'on aura auſſi OL.OB$(n.m)$::ML$(\frac{by}{a})$. BH$=\frac{bmy}{an}$. D'où l'on voit que BM(y).BH $(\frac{bmy}{an})$::ML$\frac{by}{a}$.MF$(\frac{bbmy}{aan})$.

COROLLAIRE V.

138. IL eſt clair que deux quelconques des trois points B, C, F, étant donnés, on peut facilement trouver le troiſiéme.

EXEMPLE I.

139. SOIT la courbe AMD (*Fig.* 115. *Pl.* 6.) un quart de cercle qui ait pour centre le point C; ſoient les rayons incidens BA, BM, BD paralleles entr'eux, & perpendiculaires ſur CD; ſoit

enfin la raiſon de m à n, comme 3 à 2, qui eſt celle que ſouffrent les rayons de lumiere en paſſant de l'air dans le verre. Puiſque la développée du cercle AMD ſe réunit en un point C qui en eſt le centre, il s'enſuit que ſi l'on décrit une demi-circonférence MEC qui ait pour diamètre le rayon CM, & qu'on prenne la corde $CG = \frac{2}{3}CE$; la ligne MG ſera le rayon rompu, ſur lequel on déterminera le point F, comme l'on a enſeigné ci-devant art. 133.

Pour trouver le point H où le rayon incident BA perpendiculaire ſur AMD touche la cauſtique par réfraction, l'on aura (*Art.* 137.) $AH\ (\frac{bm}{m-n}) = 3b = 3CA$. Et ſi l'on décrit une demi-circonférence CND qui ait pour diamètre le rayon CD, & qu'on prenne la corde $CN = \frac{2}{3}CD$; il eſt clair (*Art.* 137.) que le point N ſera à la cauſtique par réfraction, puiſque le rayon incident BD touche le cercle AMD au point D.

Si l'on mene AP parallele à CD; il eſt viſible (*Art.* 132.) que la portion $FH = AH - MF - \frac{2}{3}PM$: de ſorte que la cauſtique entiere $HFN = \frac{7}{3}CA - DN = \frac{7 - \sqrt{5}}{3}CA$.

Si le quart de cercle AMD (*Fig.* 116. *Pl.* 6.) eſt concave vers les rayons incidens BM, & que la raiſon de m à n ſoit de 2 à 3; on prendra ſur la demi-circonférence CEM qui a pour diamètre le rayon CM, la corde $CG = \frac{3}{2}CE$, & on tirera le rayon rompu MG ſur lequel on

déterminera le point F par la construction générale art. 133.

On aura (*Art.* 137.) A H ($\frac{bm}{m-n}$) $= -2b$, c'est-à-dire, que AH sera du côté (*Art.* 136.) de la convexité du quart de cercle A M D, & double du rayon A C. Et si l'on suppose que C G ou $\frac{3}{2}$ C E soit égale à C M ; il est manifeste que le rayon rompu M F touchera le cercle A M D en M, puisqu'alors le point G se confondra avec le point M. D'où il suit que si l'on prend CE $= \frac{2}{3}$ CD, le point M tombera au point N où la caustique H F N (*Art.* 137.) touche le quart de cercle A M D. Mais lorsque C E surpasse $\frac{2}{3}$ C D, les rayons incidens B M ne pourront plus se rompre, c'est-à-dire, passer du verre dans l'air ; puisqu'il est impossible que C G perpendiculaire sur le rayon rompu M G, soit plus grande que C M : de sorte que tous les rayons qui tomberont sur la partie N D se réfléchiront.

Si l'on mene A P parallele à C D ; il est clair (*Art.* 132.) que la portion F H $=$ A H $-$ M F $+ \frac{3}{2}$ P M : de sorte que menant N K parallele à C D, la caustique entiere H F N $= 2$C A $+ \frac{3}{2}$ A K $= \frac{7-\sqrt{5}}{2}$ C A.

EXEMPLE II.

140. SOIT la courbe A M D (*Fig.* 117. *Pl.* 6.) une logarithmique spirale qui ait pour centre le point A, duquel partent tous les rayons incidens A M.

Il eſt clair (*Art.* 91.) que le point E tombe ſur le point A, c'eſt-à-dire, que $a = y$. Si donc l'on met à la place de a ſa valeur y dans $\frac{bbmy}{bmy - any + aan}$ valeur (*Art.* 133.) de MF lorſque la courbe eſt concave du côté du point lumineux ; on aura MF $= b$; d'où l'on voit que le point F tombe ſur le point G.

Si l'on mene la droite AG, & la tangente MT ; l'angle AGO complément à deux droits de l'angle AGM, ſera égal à l'angle AMT. Car le cercle qui a pour diamètre la ligne CM, paſſant par les points A & G, les angles AGO, AMT ont chacun pour meſure la moitié du même arc AM. Il eſt donc évident que la cauſtique AGN eſt la même logarithmique ſpirale que la donnée AMD, & qu'elle n'en différe que par ſa poſition.

PROPOSITION II.

PROBLÉME.

141. L*A cauſtique* HF (*Fig.* 118. *Pl.* 6.) *par réfraction étant donnée avec ſon point lumineux* B *& la raiſon de* m *à* n ; *trouver une infinité de courbes telles que* AM, *dont elle ſoit cauſtique par réfraction.*

Ayant pris à diſcrétion ſur une tangente quelconque HA, le point A pour un des points de la courbe AM, on décrira du centre B & de l'intervalle BA l'arc de cercle AP, & d'un autre intervalle quelconque BM un autre arc de cercle ;

& ayant pris $AE = \frac{n}{m} PM$, on décrira en enveloppant la cauſtique HF une ligne courbe EM, qui coupera l'arc de cercle décrit de l'intervalle BM, en un point M qui ſera à la courbe cherchée. Car (*Art.* 132.) $PM . AE$ ou $ML :: m . n$.

AUTRE SOLUTION.

142. On cherchera ſur une tangente quelconque FM, autre que HA, le point M tel que $HF + FM + \frac{n}{m} BM = HA + \frac{n}{m} BA$. C'eſt pourquoi ſi l'on prend $FK = \frac{n}{m} BA + AH - FH$, & qu'on trouve ſur FK un point M tel que $MK = \frac{n}{m} BM$, il ſera (*Art.* 132.) celui qu'on cherche. Or cela ſe peut faire en décrivant une ligne courbe GM (*Fig.* 119. *Pl.* 6.) telle que menant d'un de ſes points quelconque M aux points donnés B, K, les droites MB, MK, elles ayent toujours entr'elles un même rapport que m à n. Il n'eſt donc queſtion que de trouver la nature de ce lieu,

Soit pour cet effet menée MR perpendiculaire ſur BK, & nommée la donnée BK, a; & les indéterminées BR, x; RM, y. Les triangles rectangles BRM, KRM donneront $BM = \sqrt{xx+yy}$, & $KM = \sqrt{aa - 2ax + xx + yy}$: de ſorte que pour remplir la condition du Problême, l'on aura $\sqrt{xx+yy} . \sqrt{aa - 2ax + xx + yy} :: m . n$. D'où l'on tire $yy = \frac{2ammx - aamm}{mm - nn} - xx$, qui eſt

un lieu au cercle que l'on conſtruira ainſi.

Soit priſe $BG = \frac{am}{m+n}$, & $BQ = \frac{am}{m-n}$, & ſoit décrit du diamètre GQ la demi-circonférence GMQ : je dis qu'elle ſera le lieu requis. Car ayant QR ou $BQ - BR = \frac{am}{m-n} - x$, & RG ou $BR - BG = x - \frac{am}{m+n}$; la propriété du cercle, qui donne $QR \times RG = \overline{RM}^2$, donnera en termes analytiques $yy = \frac{2ammx - aamm}{mm - nn} - xx$.

Si les rayons incidens BA, BM (*Fig.* 120. *Pl.* 6.) ſont paralleles à une droite donnée de poſition, la premiere ſolution aura toujours lieu ; mais celle-ci deviendra inutile, & on pourra lui ſubſtituer la ſuivante.

Soit priſe $FL = AH - HF$; & ayant mené LG parallele à AB & perpendiculaire ſur AP, on prendra $LO = \frac{n}{m} LG$, & on tirera LP parallele à GO, & PM parallele à GL. Il eſt clair (*Art.* 132.) que le point M ſera celui qu'on cherche ; car puiſque $LO = \frac{n}{m} LG$, $ML = \frac{n}{m} PM$.

Si la cauſtique FH par réfraction, ſe réunit en un point ; les courbes AM deviennent les Ovales de *Deſcartes*, qui ont fait tant de bruit parmi les Géométres.

COROLLAIRE I.

143. On démontre de même que dans les cauſtiques par réfléxion, (*Art.* 130.) que les cour-

bes A M ſont de nature différente entr'elles, & qu'elles ne ſont géométriques que lorſque la cauſtique H F par réfraction eſt géométrique & rectifiable.

COROLLAIRE II.

144. UNE ligne courbe A M (*Fig.* 121. *Pl.* 7.) étant donnée avec le point lumineux B, & la raiſon de m à n; trouver une infinité de lignes telles que D N, enſorte que les rayons rompus M N ſe rompent de nouveau à la rencontre de ces lignes D N pour ſe réunir en un point donné C.

Si l'on imagine que la ligne courbe H F ſoit la cauſtique par réfraction de la courbe donnée A M, formée par le point lumineux B; il eſt clair que cette même ligne H F doit être auſſi la cauſtique par réfraction de la courbe cherchée D N, ayant pour point lumineux le point donné C. C'eſt pourquoi (*Art.* 132.) $\frac{n}{m}BA + AH = \frac{n}{m}BM + MF + FH$, & $NF + FH - \frac{n}{m}NC = HD - \frac{n}{m}DC$; & partant $\frac{n}{m}BA + AH = \frac{n}{m}BM + MN + HD - \frac{n}{m}DC + \frac{n}{m}NC$; & tranſpoſant à l'ordinaire, $\frac{n}{m}BA - \frac{n}{m}BM + \frac{n}{m}DC + AD = MN + \frac{n}{m}NC$. Ce qui donne cette conſtruction.

Ayant pris à diſcrétion ſur un rayon rompu quelconque A H le point D pour un de ceux de la courbe cherchée D N, on prendra ſur un autre

rayon rompu quelconque MF la partie $MK = \frac{n}{m}BA - \frac{n}{m}BM + \frac{n}{m}DC + AD$; & ayant trouvé, comme ci-dessus (*Art.* 142.), le point N tel que $NK = \frac{n}{m}NC$, il est clair (*Art.* 132.) qu'il sera à la courbe DN.

COROLLAIRE GÉNÉRAL.

Pour les trois Sections précédentes.

145. IL est manifeste (*Art.* 80. 85. 107. 108. 114. 115. 128. 129. 134 143.) qu'une ligne courbe n'a qu'une seule développée, qu'une seule caustique par réfléxion, & qu'un seule par réfraction, le point lumineux & le rapport des sinus étant donnés, lesquelles lignes sont toujours géométriques & rectifiables lorsque cette courbe est géométrique. Au lieu qu'une même ligne courbe peut être la développée, & l'une & l'autre caustique dans le même rapport des sinus, & dans la même position du point lumineux, commune à une infinité de lignes très differentes entr'elles, & qui ne sont géométriques que lorsque cette courbe est géométrique & rectifiable (*Consultez la Note cinquante-deuxieme.*)



SECTION VIII.

Uſage du Calcul des différences pour trouver les points des lignes courbes qui touchent une infinité de lignes données de poſition, droites ou courbes.

PROPOSITION I.

PROBLÉME.

146. SOIT *donnée une ligne quelconque* AMB, *(Fig. 122. Pl. 7.) qui ait pour axe la droite* AP; *ſoient de plus entendues une infinité de paraboles* AMC, AmC, *qui paſſent toutes par le point* A, *& qui ayent pour axes les appliquées* PM, pm. *Il faut trouver la ligne courbe qui touche toutes ces Paraboles.*

Il eſt clair que le point touchant de chaque parabole AMC eſt le point d'interſection C où la parabole AmC, qui en eſt infiniment proche, la coupe. Cela poſé, & ayant mené CK parallele à MP, ſoient nommées les données AP, x; PM, y; & les inconnues AK, u; KC, z. On aura par la propriété de la parabole, $\overline{AP}^2$ (xx). $\overline{PK}^2$ ($uu - 2ux + xx$) : : MP (y). MP — CK ($y - z$). Ce qui donne $zxx = 2uxy - uuy$, qui eſt l'équation commune à toutes les paraboles, telles que AMC. Or je remarque que les inconnues AK (u) & KC (z) demeurent les mêmes, pendant que les données AP (x)

& PM (y) varient en devenant Ap & pm; & qu'il n'arrive que KC (z) demeure la même, que lorſque le point C eſt celui d'interſection : car il eſt viſible que par tout ailleurs la droite KC coupera les deux paraboles AMC, AmC en deux différens points, & qu'elle aura par conſéquent deux valeurs qui répondront à la même de AK. C'eſt pourquoi ſi l'on traite u & z comme conſtantes, en prenant la différence de l'équation que l'on vient de trouver, on déterminera le point C à être celui d'interſection. On aura donc $2zxdx = 2uxdy + 2uydx - uudy$: d'où l'on tire l'inconnue AK (u) $= \frac{2xxdy - 2yxdx}{xdy - 2ydx}$ en mettant pour z ſa valeur $\frac{2uxy - uuy}{xx}$; & la nature de la courbe AMB étant donnée, on trouvera une valeur de dy en dx, laquelle étant ſubſtituée dans la valeur de AK, cette inconnue ſera enfin exprimée en termes entiérement connus & délivrés des différences. Ce qui étoit propoſé.

Si au lieu des paraboles AMC, on propoſoit d'autres lignes droites ou courbes dont la poſition fût déterminée, on réſoudroit toujours le Problême à peu près de la même maniére : & c'eſt ce que l'on verra dans les Propoſitions ſuivantes.

EXEMPLE.

147. QUE l'équation $xx = 4ay - 4yy$ exprime la nature de la courbe AMB : elle ſera une demi-ellipſe qui aura pour petit axe, la droite AB

$= a$ perpendiculaire ſur AP, & dont le grand axe ſera double du petit.

On trouve $xdx = 2ady - 4ydy$; & partant AK $\left(\frac{2xxdy - 2xydx}{xdy - 2ydx}\right) = \frac{ax}{y} = u$. D'où il ſuit que ſi l'on prend AK quatrieme proportionnelle à MP, PA, AB, & qu'on mene KC perpendiculaire ſur AK; elle ira couper la parabole AMC au point cherché C.

Pour avoir la nature de la courbe qui touche toutes les paraboles, ou qui paſſe par tous les points C ainſi trouvés, on cherchera l'équation qui exprime la rélation de AK (u) à KC (z) en cette ſorte. Mettant à la place de u ſa valeur $\frac{ax}{y}$ dans $zxx = 2uxy - uuy$, l'on en tire $y = \frac{aa}{2a - z}$; & partant x ou $\frac{uy}{a} = \frac{au}{2a - z}$. Si donc l'on met ces valeurs à la place de x & y dans $xx = 4ay - 4yy$, on formera l'équation $uu = 4aa - 4az$ où x & y ne ſe rencontrent plus, & qui exprime la rélation de AK à KC. D'où l'on voit que la courbe cherchée eſt une parabole qui a pour axe la ligne BA, pour ſommet le point B, pour foyer le point A, & dont le paramétre par conſéquent eſt quadruple de AB.

On vient de trouver $y = \frac{aa}{2a - z}$, d'où l'on tire KC (z) $= \frac{2ay - aa}{y}$. Or comme cette valeur eſt poſitive lorſque $2y$ ſurpaſſe a, négative lorſqu'il eſt moindre, & nulle lorſqu'il lui eſt égal : il s'en-

ſuit que le point touchant C tombe au-deſſus de AP dans le premier cas, comme l'on avoit ſuppoſé en faiſant le calcul; au deſſous dans le ſecond, & enfin ſur A P dans le troiſieme.

Si l'on mene la droite A C qui coupe M P en G; je dis que $MG = BQ$, & que le point G eſt le foyer de la parabole A M C. Car 1°. A K ($\frac{ax}{y}$). K C ($\frac{2ay - aa}{y}$) : : A P (x). P G $= 2y - a$. & partant M G $= a - y = $ B Q. 2°. Le paramètre de la parabole A M C, eſt $= 4a - 4y$ en mettant pour xx ſa valeur $4ay - 4yy$; & partant M G ($a - y$) eſt la quatrieme partie du paramètre: d'où l'on voit que le point G eſt le foyer de la parabole; & qu'ainſi l'angle B A C doit être diviſé en deux également par la tangente en A.

Il ſuit de ce que le paramètre de la parabole A M C eſt quadruple de B Q, que le ſommet M tombant en A, le paramètre ſera quadruple de A B, & qu'ainſi la parabole, qui a pour ſommet le point A, eſt aſymptotique de celle qui paſſe par tous les points C.

Comme la parabole B C touche toutes les paraboles telles que A M C; il eſt clair que toutes ces paraboles couperont la ligne déterminée A C en des points qui ſeront plus proches du point A que le point C. Or l'on démontre dans la Baliſtique (en ſuppoſant que A K ſoit horizontale) que toutes les paraboles, telles que A M C, marquent le chemin que décrivent en l'air des Bom-

bes qui seroient jettées par un Mortier placé en A dans toutes les élévations possibles avec la même force. D'où il suit que si l'on mene une droite qui divise par le milieu l'angle BAC; elle marquera la position que doit avoir le Mortier, afin que la Bombe qu'il jette, tombe sur le plan AC donné de position, en un point C plus éloigné du Mortier, qu'en toute autre élévation.

PROPOSITION II.

PROBLÉME.

148. SOIT *donnée une courbe quelconque* AM, (*Fig.* 123. *Pl.* 7.) *qui ait pour axe la droite* AP; *trouver une autre courbe* BC *telle qu'ayant mené à discrétion l'appliquée* PM, *& la perpendiculaire* PC *à cette courbe, ces deux lignes* PM, PC *soient toujours égales entr'elles.*

Si l'on conçoit une infinité de cercles décrits des centres P, p, & des rayons PC, pC égaux à PM, pm; il est clair que la courbe cherchée BC doit toucher tous ces cercles, & que le point touchant C de chaque cercle est le point d'intersection où le cercle qui en est infiniment proche, le coupe. Cela posé, soit menée CK perpendiculaire sur AP; soient nommées les données & variables AP, x; PM ou PC, y; les inconnues & constantes AK, u; KC, z; & l'on aura par la propriété du cercle $\overline{PC}^2 = \overline{PK}^2 + \overline{KC}^2$, c'est-à-dire, en termes analytiques $yy = xx - 2ux + uu + zz$, qui est l'équation commune à tous ces cercles, dont la différence est $2ydy = 2xdx -$

$2udx$: d'où l'on tire PK $(x-u)=\frac{ydy}{dx}$; ce qui donne cette construction générale.

Soit menée MQ perpendiculaire à la courbe AM ; & ayant pris PK = PQ, soit tirée KC parallele à PM : je dis qu'elle rencontrera le cercle décrit du centre P & du rayon PC = PM au point C, où il touche la courbe cherchée BC. Ce qui est évident ; puisque PQ $=\frac{ydy}{dx}$.

On peut encore trouver la valeur de PK de cette autre manière.

Ayant mené PO perpendiculaire sur Cp, les triangles rectangles pOP, PKC seront semblables ; & partant Pp (dx). Op (dy) : : PC (y). PK $=\frac{y\,dy}{dx}$.

Lorsque PQ = PM, il est clair que le cercle décrit du rayon PC, touchera KC au point K ; de sorte que le point touchant C se confondra avec le point K, & tombera par conséquent sur l'axe.

Mais lorsque PQ surpassera PM, le cercle décrit du rayon PC ne pourra toucher la courbe BC ; puisqu'il ne pourra rencontrer la droite KC en aucun point.

EXEMPLE.

149. SOIT la courbe donnée AM, (*Fig.* 123. *Pl.* 7.) une parabole qui ait pour équation $ax = yy$. On aura PQ ou PK $(x-u)=\frac{1}{2}a$; & par conséquent $x=\frac{1}{2}a+u$, & $yy=\frac{1}{4}aa+zz$ à

cause

cause du triangle rectangle PKC. Or si l'on met ces valeurs dans $ax = yy$, on formera l'équation $\frac{1}{2}aa + au = \frac{1}{4}aa + zz$ ou $\frac{1}{4}aa + au = zz$, qui exprime la nature de la courbe BC. D'où il est clair que cette courbe est la même parabole que AM; puisqu'elles ont l'une & l'autre le même paramètre a, & que son sommet B est éloigné du sommet A de la distance $BA = \frac{1}{4}a$.

PROPOSITION III.

PROBLÉME.

150. SOIT *donnée une ligne courbe quelconque* AM, (*Fig.* 124. *Pl.* 7.) *qui ait pour diamètre la droite* AP, *& dont les appliquées* PM, pm *soient paralleles à la droite* AQ *donnée de position; & ayant mené* MQ, mq *paralleles à* AP, *soient tirées les droites* PQC, pqC. *On demande la courbe* AC *qui a pour tangentes toutes ces droites : ou, ce qui est la même chose, il s'agit de déterminer sur chaque droite* PQC *le point touchaut* C.

Ayant imaginé une autre tangente *pq*C infiniment proche de PQC, & mené CK parallele à AQ, on nommera les données & variables AP, x; PM ou AQ, y; les inconnues & constantes AK, u; KC, z; & les triangles semblables PAQ, PKC donneront AP (x). AQ (y) :: PK $(x + u)$. KC $(z) = y + \frac{uy}{x}$. qui est l'équation commune à toutes les droites, telles que KC. Sa différence est $dy + \frac{uxdy - uydx}{xx} = o$, d'où l'on

tire A K (u) $= \frac{xxdy}{ydx - xdy}$. Ce qui donne cette construction générale.

Soit menée la tangente MT, & soit prise AK troisieme proportionnelle à A T, A P : je dis que si l'on mene KC parallele à A Q, elle ira couper la droite P Q C au point cherché C.

Car A T ($\frac{ydx - xdy}{dy}$). A P (x) : : A P (x) .

A K $= \frac{xxdy}{ydx - xdy}$.

EXEMPLE I.

151. SOIT la courbe donnée A M, (*Fig.* 124. *Pl.* 7.) une parabole qui ait pour équation $ax = yy$. On aura A T = A P ; d'où il suit que A K (u) $= x$, c'est-à-dire, que le point K tombe sur le point T. Si l'on veut à présent avoir une équation qui exprime la rélation de A K (u) à K C (z); on trouvera K C (z) $= 2y$, puisque l'on vient de trouver que P K est double de A P. Mettant donc à la place de x & y leurs valeurs u & $\frac{1}{2}z$ dans $ax = yy$, on aura $4au = zz$: d'où l'on voit que la courbe A C est une parabole qui a pour sommet le point A, & pour paramétre une ligne quadruple du paramètre de la parabole A M.

EXEMPLE II.

152. SOIT la courbe donnée AM, (*Fig.* 125. *Pl.* 7.) un quart de cercle B M D qui ait pour centre le point A, & pour rayon la ligne A B ou A D, que j'appelle a. Il est clair que P Q est tou-

jours égale au rayon AM ou AB, c'est-à-dire, qu'elle est par-tout la même : de sorte que l'on peut concevoir que ses extrêmités P, Q glissent le long des côtés BA, AD de l'angle droit BAD. On aura AK (u) $= \frac{x^3}{aa}$, puisque AT $= \frac{aa}{x}$; & les paralleles KC, AQ donneront AP (x) . PQ (a) : : AK ($\frac{x^3}{aa}$) QC $= \frac{xx}{a}$. D'où l'on voit que pour avoir le point touchant C, il n'y a qu'à prendre QC troisieme proportionnelle à PQ & AP. Si l'on cherche l'équation qui exprime la nature de la courbe BCD, on trouvera celle-ci,

$$\begin{array}{llll} u^6 - 3aau^4 + & 3a^4uu - & a^6 = 0 & \\ + 3zz & + 21aazz & + 3a^4zz & \\ & + 3z^4 & - 3aaz^4 & \\ & & + z^6 & \end{array}$$

COROLLAIRE I.

153. SI l'on veut chercher le rapport de la portion DC de la courbe BCD à sa tangente CP, l'on imaginera une autre tangente cp infiniment proche de CP; & ayant décrit du centre C le petit arc PO, l'on aura cp — CP ou Op — Cc $= -\frac{2xdx}{a}$, pour la différence de CP $= \frac{aa - xx}{a}$: d'où l'on tire Cc = OP + $\frac{2xdx}{a}$. Or à cause des triangles rectangles semblables QPA, PpO, l'on aura PQ (a) . AP (x) : : Pp (dx) . OP $= \frac{xdx}{a}$.

& partant $Cc = \frac{3xdx}{a} = DC - Dc$. Il eſt donc manifeſte qu'en quelque endroit que l'on prenne le point C, l'on aura toujours $DC - Dc\,(\frac{3xdx}{a})$. $CP - cp\,(\frac{2xdx}{a})$ :: 3 . 2. D'où il ſuit que la ſomme de toutes les différences $DC - Dc$ qui répondent à la droite PD, c'eſt-à-dire, (*Art.* 96.) la portion DC de la courbe BCD, eſt à la ſomme de toutes les différences $CP - cp$ qui répondent à la même droite PD, c'eſt-à-dire (*Art.* 96.) à la tangente CP :: 3 . 2. Et de même que la courbe entière BCD eſt à ſa tangente BA :: 3 . 2.

Corollaire II.

154. Si l'on développe la courbe BCD en commençant par le point D, on formera la ligne courbe DNF telle que CN . CP :: 3 . 2. puiſque CN eſt toujours égale à la portion DC de la courbe BCD. D'où il ſuit que les ſecteurs ſemblables CN*n*, CPO ſont entr'eux :: 9 . 4. & partant que l'eſpace DCN renfermé par les courbes DC, DN, & par la droite CN qui eſt tangente en C, & perpendiculaire en N, eſt à l'eſpace DCP renfermé par la courbe DC, & par les deux tangentes DP, CP, comme 9. à 4.

Corollaire III.

155. Le centre de peſanteur du ſecteur CN*n* doit être ſitué ſur l'arc PO; puiſque $CP = \frac{2}{3}CN$. Et comme cet arc eſt infiniment petit, il s'en-

ſuit que ce centre doit être ſur la droite AD ; & partant que le centre de peſanteur des eſpaces DCN, BDF qui ſont composés de tous ces ſecteurs, doit être ſur cette droite AD : de ſorte que ſi l'on décrivoit de l'autre côté de BF une figure toute pareille à BDF, le centre de peſanteur de la figure entiére ſeroit au point A.

COROLLAIRE IV.

156. A cauſe des triangles rectangles ſemblables PQA, pPO, l'on aura PQ (a). AQ ou PM ($\sqrt{aa-xx}$) : : Pp (dx). PO $= \frac{dx\sqrt{aa-xx}}{a}$. Et à cauſe des ſecteurs ſemblables CPO, CNn, l'on aura auſſi CP. CN, ou 2.3 : : PO ($\frac{dx\sqrt{aa-xx}}{a}$). Nn $= \frac{3dx\sqrt{aa-xx}}{2a}$. Or le rectangle MP $\times$ Pp, c'eſt-à-dire, (*Art.* 2.) le petit eſpace circulaire MPpm $= dx\sqrt{aa-xx}$. On aura donc AB $\times$ Nn $= \frac{3}{2}$ MPpm : d'où il ſuit que la portion ND de la courbe DNF étant multipliée par le rayon AB, eſt ſeſquialtére du ſegment circulaire DMP, & que la courbe entiére DNF eſt égale aux trois quarts de BMD, quatrieme partie de la circonférence du cercle.

PROPOSITION IV.

PROBLÉME.

157. SOIT *donnée une courbe quelconque* AM, (*Fig.* 126. *Pl.* 7.) *qui ait pour axe la droite*

AP; & ſoient entendues une infinité de perpendiculaires MC, mC à cette courbe. On demande la courbe qui a pour tangentes toutes ces perpendiculaires : ou ce qui eſt la même choſe, il faut trouver ſur chaque perpendiculaire MC le point touchant C.

Ayant imaginé une autre perpendiculaire *m* C infiniment proche de MC, avec une appliquée MP, l'on menera par le point d'interſection C les droites CK perpendiculaire, & CE parallele à l'axe: ayant enſuite nommé les données & variables AP, x; PM, y; les inconnues & conſtantes AK, u; KC, z; l'on aura PQ $= \frac{ydy}{dx}$, PK ou CE $= u - x$, ME $= y + z$; & les triangles rectangles ſemblables MPQ, MEC donneront MP (y). PQ ($\frac{ydy}{dx}$) : : ME ($y + z$). EC ($u - x$) $= \frac{ydy + zdy}{dx}$. qui eſt une équation commune à toutes les perpendiculaires telles que MC, & dont la différence (en ſuppoſant dx conſtante) donne $- dx = \frac{yddy + dy^2 + zddy}{dx}$: d'où l'on tire ME ($z + y$) $= \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$. Or la nature de la courbe AM étant donnée, l'on aura des valeurs de dy^2 & ddy en dx^2, leſquelles étant ſubſtituées dans $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, donneront pour ME une valeur entiérement connue & délivrée des différences. Ce qui étoit propoſé.

Il eſt évident que la courbe qui paſſe par tous les points C, eſt la développée de la courbe AM; & comme l'on en a traité exprès dans la Section cinquiéme, il ſeroit inutile d'en donner ici des exemples nouveaux.

PROPOSITION V.

Probléme.

158. Deux *lignes quelconques* AM, BN (*Fig.* 127. *Pl.* 7.) *étant données avec une ligne droite* MN *qui demeure toujours la même; on ſuppoſe que les extrêmités* M, N *de cette ligne gliſſent continuellement le long des deux autres, & l'on demande la courbe qu'elle touche toujours dans ce mouvement.*

Ayant mené les tangentes MT, NT, & imaginé une autre droite *mn* infiniment proche de MN, & qui la coupe par conſéquent au point C où elle touche la courbe dont il s'agit de déterminer les points. Il eſt clair que la droite MN, pour parvenir en *mn*, a parcouru par ſes extrêmités les petites portions M*m*, N*n* des lignes AM, BN, leſquelles ſont communes à cauſe de leur infinie petiteſſe, aux tangentes TM, TN: de ſorte que l'on peut concevoir que la ligne MN pour parvenir dans la ſituation infiniment proche *mn*, ait gliſſé le long des droites TM, TN données de poſition.

Cela bien entendu, ſoient menées ſur NT les perpendiculaires MP, CK; ſoient nommées les

données & variables TP, x; PM, y; les inconnues & constantes TK, u; KC, z; & la donnée MN qui demeure par-tout la même, a. Le triangle rectangle MPN donnera PN $= \sqrt{aa - yy}$; & à cause des triangles semblables NPM, NKC, l'on aura NP $(\sqrt{aa - yy})$. PM (y) :: NK $(u - x - \sqrt{aa - yy})$. KC $(z) = \frac{uy - xy}{\sqrt{aa - yy}} - y$, dont la différence donne $aaudy - aaxdy - aaydx + y^3dx = \overline{aady - yydy}\sqrt{aa - yy}$: d'où en faisant $\sqrt{aa - yy} = m$ pour abréger, l'on tire PK $(u - x)$ $= \frac{m^3dy + mmydx}{aady} = \frac{m^3 + mmx}{aa}$ en mettant pour ydx sa valeur xdy, à cause des triangles semblables mRM, MPT; & partant MC $= \frac{mm + mx}{a}$: ce qui donne cette construction.

Soit menée TE perpendiculaire sur MN, & soit prise MC $=$ NE : je dis que le point C sera celui qu'on cherche. Car à cause des triangles rectangles semblables MNP, TNE, l'on aura MN (a). NP (m) :: NT $(m + x)$. NE ou MC $= \frac{mm + mx}{a}$.

Autre maniére. Ayant mené TE perpendiculaire sur MN, & décrit du centre C les petits arcs MS, NO, on nommera les données NE, r; ET, s; MN, a; & l'inconnue CM, t. On aura Sm ou On $= dt$; & les triangles rectangles semblables MET & mSM, NET & nON, CMS & CNO donneront ME $(r - a)$. ET

$(s)::mS\,(dt).\,SM = \frac{sdt}{r-a}$. Et NE (r).

ET $(s)::nO\,(dt).\,ON = \frac{sdt}{r}$. Et MS—NO

$(\frac{asdt}{rr-ar}).\,MS(\frac{sdt}{r-a})::MN\,(a).\,MC\,(t) = r$.
Ce qui donne la même construction que ci-dessus.

Si l'on suppose que les lignes AM, BN soient des droites qui fassent entr'elles un angle droit ; il est visible que la courbe cherchée est la même que celle de l'art. 152.

PROPOSITION VI.

Probléme.

159. Soient *données trois lignes quelconques* L, M, N; (*Fig.* 128. *Pl.* 7.) *& soient entendues de chacun des points* L, l *de la ligne* L *deux tangentes* LM *&* LN, lm *&* ln, *aux deux courbes* M *&* N, *une à chacune. On demande la quatriéme courbe* C, *qui ait pour tangentes toutes les droites* MN, mn *qui joignent les points touchans des courbes* M, N.

Ayant tiré la tangente LE, & mené par un de ses points quelconque E les perpendiculaires EF, EG sur les deux autres tangentes ML, NL, on concevra que le point *l* soit infiniment près du point L; on tirera les petites droites LH, LK perpendiculaires sur *ml*, *nl*; comme aussi les perpendiculaires MP, *m*P, NQ, *n*Q sur les tangentes ML, *ml*, NL, *nl*, lesquelles perpendiculaires s'entrecoupent aux points P &

Q. Tout cela formera les triangles rectangles semblables EFL, & LHl, EGL & LKl; comme aussi les triangles LMH & MPm, LnK & NQn rectangles en H & m, K & N, qui seront semblables entr'eux, puisque les angles LMH, MPm étant joints l'un ou l'autre au même angle PMm, font un droit. On prouvera de même, que les angles LnK, NQn sont égaux entr'eux.

Cela posé, on nommera le petit côté Mm du polygone qui compose la courbe M, du; & les données EF, m; EG, n; MN ou mn, a; ML ou ml, b; NL ou nl, c; MP ou mP, f; NQ ou nQ, g (je prens ici les droites MP, NQ pour données, parce que la nature des courbes M, N étant donnée par la supposition, on les pourra toujours trouver (*Art.* 78.); & l'on aura, 1°. MP(f). ML(b) :: M$m$$(du)$. LH $= \frac{bdu}{f}$. 2°. EF(m). EG(n) :: LH$(\frac{bdu}{f})$. LK $= \frac{bndu}{mf}$. 3°. LN ou L$n$$(c)$. nQ(g) :: LK$(\frac{bndu}{mf})$. nN $= \frac{bgndu}{cfm}$. 4°. (menant MR parallele à NL ou nl) $ml(b)$. $ln(c)$ :: mM(du). MR $= \frac{cdu}{b}$. 5°. MR + N$n$$(\frac{cdu}{b} + \frac{bgndu}{cfm})$. MR$(\frac{cdu}{b})$ :: MN (a). MC $= \frac{accfm}{ccfm + bbgn}$. Ce qu'il falloit trouver.

Si la tangente EL tomboit sur la tangente ML, il est clair que EF (m) deviendroit nulle ou zero;

& partant que le point cherché C tomberoit ſur le point M. De même ſi la tangente EL ſe confondoit avec la tangente LN, alors EG (n) deviendroit nulle, & l'on auroit par conſéquent MC $= a$: d'où l'on voit que le point cherché C tomberoit auſſi ſur le point N. Et enfin ſi la tangente EL tomboit dans l'angle GLI ; en ce cas EG (n) deviendroit négative : ce qui donneroit alors MC $= \frac{accfm}{ccfm - bbgn}$; & le point cherché C ne tomberoit plus entre les points M & N, mais de part ou d'autre.

EXEMPLE I.

160. SUPPOSONS que les courbes M & N (*Fig.* 129. *Pl.* 7.) ne faſſent qu'un cercle. Il eſt clair en ce cas que $b = c$, & $f = g$; ce qui donne MC $= \frac{am}{m + n}$, d'où l'on voit qu'il ne faut alors que couper la droite MN en raiſon donnée de m à n pour avoir le point cherché C ; c'eſt-à-dire, enſorte que MC . NC : : m . n.

EXEMPLE. II.

161. SUPPOSONS que les courbes M & N ſoient une Section conique quelconque. La conſtruction générale ſe peut changer en cette autre qui eſt beaucoup plus ſimple, ſi l'on fait attention à une proprieté des Sections coniques, que l'on trouve démontrée dans les Livres qui en traitent : ſçavoir que ſi l'on mene de chacun des points L, l d'une ligne droite EL deux tangentes LM

& L N, *lm* & *ln* à une Section conique; toutes les droites M N, *mn* qui joignent les points touchans, se couperont dans le même point C, par lequel passe le diamètre A C, dont les ordonnées sont paralleles à la droite E L. Car il suit de là, que pour avoir le point C, il ne faut que mener un diamètre qui ait ses ordonnées paralleles à la tangente E L.

Il est évident que dans le cercle, le diamètre doit être perpendiculaire sur la tangente E L; c'est-à-dire, qu'en menant de son centre A une perpendiculaire A B sur cette tangente, elle coupera la droite M N au point cherché C.

REMARQUE.

162. ON peut par le moyen de ce Problême (*Fig.* 128. *Pl.* 7.) résoudre celui-ci qui dépend de la Méthode des Tangentes.

Les trois courbes C, M, N, étant données, on fera rouler une ligne droite M N autour de la courbe C, ensorte qu'elle la touche continuellement; on tirera par les points M, N, où elle coupe les courbes M & N, les tangentes M L, N L qui s'entrecoupent en un point L, lequel décrit dans ce mouvement une quatriéme courbe L *l*. Il s'agit de tirer la tangente L E de cette courbe, la position des droites M N, M L, N L étant donnée avec le point touchant C.

Car il est visible que ce Problême n'est que l'inverse du précédent, & qu'ici M C est donnée: ce qu'on cherche, c'est la raison de E F, E G, qui

détermine la position de la tangente EL. C'est pourquoi si l'on nomme la donnée MC, h; l'on aura $\frac{accfm}{ccfm + bbgn} = h$: d'où l'on tire $m = \frac{bbghn}{accf - ccfh}$; & par conséquent la tangente LE doit être tellement située dans l'angle donné MLG, que si l'on mene d'un de ses points quelconque E les perpendiculaires EF, EG sur les côtés de cet angle, elles soient toujours entr'elles en raison donnée de $bbgh$ à $accf - ccfh$. Or cela se fait en menant MD parallele à NL, & égale à $\frac{b^3gh}{accf - ccfh}$.

Il est évident (*Art.* 161.) que si les deux courbes M & N (*Fig.* 129. *Pl.* 7.) ne font qu'une Section conique, il ne faudra que tirer la tangente LE parallele aux ordonnées du diamètre qui passe par le point C. (*Consultez la Note* 53e.)



SECTION IX.

Solution de quelques Problêmes qui dépendent des Méthodes précédentes.

PROPOSITION I.

PROBLÉME.

163. SOIT *une ligne courbe* AMD (*Fig.* 130. *Pl.* 7.) ($AP = x$, $PM = y$, $AB = a$) *telle que la valeur de l'appliquée* y *ſoit exprimée par une fraction, dont le numérateur & le dénominateur deviennent chacun zero lorſque* $x = a$, *c'eſt-à-dire, lorſque le point* P *tombe ſur le point donné* B. *On demande quelle doit être alors la valeur de l'appliquée* BD.

Soient entendues deux lignes courbes ANB, COB, qui ayent pour axe commun la ligne AB, & qui ſoient telles que l'appliquée PN exprime le numérateur, & l'appliquée PO le dénominateur de la fraction générale qui convient à toutes les PM : de ſorte que $PM = \frac{AB \times PN}{PO}$. Il eſt clair que ces deux courbes ſe rencontreront au point B; puiſque par la ſuppoſition PN & PO deviennent chacune zero, lorſque le point P tombe en B. Cela poſé, ſi l'on imagine une appliquée *bd* infiniment proche de BD, & qui rencontre les lignes courbes ANB, COB aux points *f*, *g*; l'on aura *bd*

$= \frac{AB \times bf}{bg}$, laquelle (*Art.* 2.) ne différe pas de BD. Il n'eſt donc queſtion que de trouver le rapport de *bg* à *bf*. Or il eſt viſible que la coupée AP devenant AB, les appliquées PN, PO deviennent nulles, & que AP devenant A*b*, elles deviennent *bf*, *bg*. D'où il ſuit que ces appliquées, elles mêmes *bf*, *bg*, ſont la différence des appliquées en B & *b* par rapport aux courbes ANB, COB; & partant que ſi l'on prend la différence du numérateur, & qu'on la diviſe par la différence du dénominateur, après avoir fait $x = a = Ab$ ou AB, l'on aura la valeur cherchée de l'appliquée *bd* ou BD. Ce qu'il falloit trouver.

EXEMPLE. I.

164. SOIT $y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$. Il eſt clair que lorſque $x = a$, le numérateur & le dénominateur de la fraction deviennent égaux chacun à zero. C'eſt pourquoi l'on prendra la différence $\frac{a^3dx - 2x^3dx}{\sqrt{2a^3x - x^4}} - \frac{aadx}{3\sqrt[3]{axx}}$ du numérateur, & on la diviſera par la différence $-\frac{3adx}{4\sqrt[4]{a^3x}}$ du dénominateur, après avoir fait $x = a$, c'eſt-à-dire, qu'on diviſera $-\frac{4}{3}adx$ par $-\frac{3}{4}dx$; ce qui donne $\frac{16}{9}a$ pour la valeur cherchée de BD.

EXEMPLE II.

165. SOIT $y = \frac{aa - ax}{a - \sqrt{ax}}$. On trouve $y = 2a$; lorsque $x = a$.

On pourroit résoudre cet exemple sans avoir besoin du calcul des différences, en cette sorte.

Ayant ôté les incommensurables, on aura $aaxx + 2aaxy - axyy - 2a^3x + a^4 + aayy - 2a^3y = 0$, qui étant divisé par $x - a$, se réduit à $aax - a^3 + 2aay - ayy = 0$; & substituant a pour x, il vient comme auparavant $y = 2a$.

LEMME.

166. SOIT *une ligne courbe quelconque* BCG, (*Fig.* 131. *Pl.* 7.) *avec une ligne droite* AE *qui la touche au point* B, *& sur laquelle soient marqués à discrétion deux points fixes* A, E. *Si l'on fait rouler cette droite autour de la courbe, ensorte qu'elle la touche continuellement; il est clair que les points fixes* A, E *décriront dans ce mouvement deux courbes* AMD, ENH. *Si l'on mene à présent* DL *parallele à* AB, *& qui fasse par conséquent avec* DK (*sur laquelle je suppose la droite* AE *lorsqu'elle touche la courbe* BCG *en* G) *l'angle* KDL *égal à l'angle* AOD *fait par les tangentes en* B, G; *& que l'on décrive comme on voudra, du centre* D *l'arc* KFL.

Je dis que DK . KFL : : AE . AMD ± ENH. *sçavoir* + *lorsque le point touchant tombe toujours entre les points décrivans,* & — *lorsqu'il les laisse toujours du même côté.*

Car

Car ſuppoſant que la droite A E en roulant autour de la courbe B C G ſoit parvenue dans les poſitions M C N, mCn infiniment proches l'une de l'autre, & menant les rayons D F, Df paralleles à C M, Cm : il eſt clair que les ſecteurs DFf, CMm, CNn ſeront ſemblables ; & qu'ainſi D F. Ff : : C M. Mm : : C N. Nn : : C M $\pm$ C N ou A E. $Mm \pm Nn$. Or comme cela arrivera toujours en quelqu'endroit que ſe trouve le point touchant C, il s'enſuit que le rayon D K eſt à l'arc K F L, ſomme de tous les petits arcs Ff : : A E. A M D $\pm$ E N H, ſomme de tous les petis arcs $Mm \pm Nn$. Ce qu'il falloit démontrer.

COROLLAIRE I.

167. IL eſt viſible que les courbes A M D, E N H ſont formées par le développement de la même courbe B C G ; & qu'ainſi la droite A E eſt toujours perpendiculaire ſur ces deux courbes dans toutes les poſitions où elle ſe rencontre ; de ſorte que leur diſtance eſt par-tout la même ; ce qui eſt la propriété des lignes paralleles. D'où l'on voit qu'une ligne courbe A M D étant donnée, on peut trouver une infinité de points de la courbe E N H ſans avoir beſoin de ſa développée B C G, en menant autant de perpendiculaires que l'on voudra à cette courbe, & les prenant toutes égales à la droite A E.

COROLLAIRE II.

168. Si la courbe BCG a ses deux moitiés BC, CG entiérement semblables & égales, & que l'on prenne les droites BA, GH égales entr'elles ; il est clair que les courbes AMD, ENH seront semblables & égales, ensorte qu'elles ne différeront que par leur position. D'où il suit que la courbe AMD sera à l'arc de cercle KFL :: $\frac{1}{2}$ AE. DK. c'est-à-dire, en raison donnée.

PROPOSITION II.

PROBLÉME.

169. SOIENT *deux courbes quelconques* AEV, BCG, (*Fig.* 132. *Pl.* 7.) *avec une troisieme* AMD, *telle qu'ayant décrit par le développement de la courbe* BCG *une portion de courbe* EM, *la rélation des portions de courbes* AE, EM, *&* *des rayons de la développée* EC, MG *soit exprimée par une équation quelconque donnée. On propose de mener d'un point donné* M *sur la courbe* AMD *la tangente* MT.

Ayant imaginé une autre portion de courbe *em* infiniment proche de EM, & les rayons de la développée C*e*F, G*m*R ; Soit, 1°. CH perpendiculaire sur CE, & qui rencontre en H la tangente EH de la courbe AEV. 2°. ML parallele à CE, & qui rencontre en L l'arc GL décrit du centre M & du rayon MG. 3°. GT perpendiculaire sur MG, & qui rencontre en T la tangente cherchée MT.

On nommera ensuite les données AE, x; EM, y; CE, u; GM, z; CH, s; EH, t; l'arc GL, r : d'où l'on aura $Ee = dx$, Fe ou $Rm = du = dz$; & les triangles rectangles semblables eFE, ECH donneront CE (u). CH (s) :: Fe (dz). $FE = \frac{sdz}{u}$. Et CE (u). EH (t) :: Fe (dz). Ee $(dx) = \frac{tdz}{u}$. Or par le Lemme (*Art.* 166.) $RF - me = \frac{rdz}{z}$; & partant RM $(\overline{RF - me}, + \overline{me - ME} + \overline{ME - MF}) = \frac{rdz}{z} + dy + \frac{sdz}{u}$. Donc à cause des triangles rectangles semblables mRM, MGT, l'on aura mR (dz). RM $(\frac{rdz}{z} + \frac{sdz}{u} + dy)$ :: MG (z). $GT = r + \frac{sz}{u} + \frac{zdy}{dz}$. Mais si l'on met dans la différence de l'équation donnée à la place de du & dx leurs valeurs dz & $\frac{tdz}{u}$, l'on trouvera une valeur de dy en dz, laquelle étant substituée dans $\frac{zdy}{dz}$, il viendra pour la soutangente cherchée GT une valeur entiérement connue & délivrée des différences. Ce qui étoit proposé.

Si l'on ſuppoſe que la courbe BCG (*Fig.* 133. *Pl.* 7.) ſe réuniſſe en un point O ; il eſt viſible que la portion de courbe ME (y) ſe change en un arc de cercle égal à l'arc GL (r), & que les rayons CE (u), GM (z) de la développée deviennent égaux entr'eux : de ſorte que GT, qui devient en ce cas OT, ſe trouvera $= y + s + \frac{zdy}{dz}$.

EXEMPLE.

170. SOIT $y = \frac{xz}{a}$; les différences donneront dy (*Fig.* 133. *Pl.* 7.) $= \frac{zdx - xdz}{a}$ (on prend (*Art.* 8.) $-xdz$ au lieu de $+xdz$; parce que x & y croiſſant, z diminue) $= \frac{tdz - xdz}{a}$, en mettant pour dx ſa valeur $\frac{tdz}{z}$; & partant OT ($y + s + \frac{zdy}{dz}$) $= y + s + \frac{tz - xz}{a} = \frac{as + tz}{a}$, en mettant pour $\frac{xz}{a}$ ſa valeur y.

REMARQUE.

171. SI le point O tombe ſur l'axe AB, (*Fig.* 134. *Pl.* 7.) & que la courbe AEV ſoit un demi-cercle ; la courbe AMD ſera une demi-roulette, formée par la révolution d'un demi-cercle BSN autour d'un arc égal BGN d'un cer-

cle décrit du centre O, & dont le point générateur A tombera dehors, dedans, ou sur la circonférence du demi-cercle mobile BSN, selon que la donnée *a* sera plus grande, moindre, ou égale à OV. Pour le prouver, & déterminer en même temps le point B.

Je suppose ce qui est en question, sçavoir que la courbe AMD est une demi-roulette, formée par la révolution du demi-cercle BSN, qui a pour centre le point K centre du demi-cercle AEV, autour de l'arc BGN décrit du centre O; & concevant que ce demi-cercle BSN s'arrête dans la situation BGN, telle que le point décrivant A tombe sur le point M, je mene par les centres des cercles générateurs la droite OK qui passe par conséquent par le point touchant G; & tirant KSE, j'observe que les triangles OKE, OKM sont égaux & semblables, puisque leurs trois côtés sont égaux chacun à chacun. D'où il suit 1°. Que les angles extrêmes MOK, EOK sont égaux; & qu'ainsi les angles MOE, GOB le sont aussi: ce qui donne GB. ME:: OB. OE. 2°. Que les angles MKO. EKO sont encore égaux; & qu'ainsi les arcs GN, BS, qui les mesurent, le sont aussi: la même chose se doit dire de leurs complémens GB, SN, à deux droits; puisqu'ils appartiennent à des cercles égaux. Or par la génération de la roulette, l'arc GB du cercle mobile est égal à l'arc GB de l'immobile. J'aurai donc SN. ME:: OB. OE. Cela posé,

Je nomme les données O V, b; K V ou K A, c; & l'inconnue K B, u. J'ai O B $= b + c - u$; & les secteurs semblables K E A, K S N me donnent K E (c). K S (u) : : A E (x). S N $= \frac{ux}{c}$. Et partant O B ($b + c - u$). O E (z) : : S N ($\frac{ux}{c}$). E M (y) $= \frac{uxz}{bc + cc - cu} = \frac{xz}{a}$. D'où je tire K B ($u$) $= \frac{bc + cc}{a + c}$. Il est donc évident que si l'on prend K B $= \frac{bc + cc}{a + c}$, & qu'on décrive des centres K & O le demi-cercle BSN & l'arc BGN; la courbe AMD sera une demi-roulette d'écrite par la révolution du demi-cercle BSN, autour de l'arc BGN, & dont le point décrivant A tombe dehors, dedans, ou sur la circonférence de ce cercle, selon que KV (c) est plus grand, moindre, ou égal à KB ($\frac{bc + cc}{a + c}$), c'est-à-dire, selon que a est plus grand, moindre, ou égal à O V (b).

COROLLAIRE. I.

172. Il est clair que E M (y). A E (x) : : K B × O E (uz). O B × K V ($bc + cc - uc$). Or si l'on suppose que O B devienne infinie; la droite O E le sera aussi, & deviendra parallele à O B, puisqu'elle ne la rencontrera jamais; les arcs concentriques B G N, E M deviendront des droites paralleles entr'elles, & perpendiculaires sur O B, O E: & alors la droite E M sera

à l'arc AE : : KB . KV . parce que les droites infinies OE , OB ne différant entr'elles que d'une grandeur finie, doivent être regardées comme égales.

COROLLAIRE. II.

173. De ce que les angles MKO , EKO ſont égaux, il ſuit que les triangles MKG, EKB ſeront égaux & ſemblables ; & qu'ainſi les droites MG, EB ſont égales entr'elles. D'où l'on voit (*Art.* 43.) que pour mener d'un point donné M ſur la roulette, la perpendiculaire MG, il n'y a qu'à décrire du centre O l'arc ME, & du centre M de l'intervalle EB un arc de cercle qui coupera la baſe BGN en un point G, par où & par le point donné M l'on tirera la perpendiculaire requiſe.

COROLLAIRE III.

174. Un point G étant donné ſur la circonférence du demi-cercle mobile BGN ; ſi l'on veut trouver le point M de la roulette ſur lequel tombe le point décrivant A, lorſque le point donné G touche la baſe, il ne faut que prendre l'arc SN égal à l'arc BG, & ayant tiré le rayon KS qui rencontre en E la circonférence AEV, décrire du centre O l'arc EM. Car il eſt évident que cet arc coupera la roulette au point cherché M.



PROPOSITION III.

PROBLÉME.

175. SOIT *une demi-roulette* AMD (*Fig.* 135. 136. *Pl.* 7.) *décrite par la révolution du demi-cercle* BGN *autour d'un arc égal* BGN *d'un autre cercle, enſorte que les parties révolues* BG, BG *ſoient toujours égales entr'elles; ſoit le point décrivant* M *pris ſur le diametre* BN *dehors, dedans, ou ſur la circonférence mobile* BGN. *On demande le point* M *de la plus grande largeur de la demi-roulette par rapport à ſon axe* OA.

Suppoſant que le point M ſoit celui qu'on cherche, il eſt clair (*Art.* 47.) que la tangente en M doit être parallele à l'axe OA; & qu'ainſi la perpendiculaire MC à la roulette, doit-être auſſi perpendiculaire ſur l'axe qu'elle rencontre au point P. Cela poſé, ſi l'on mene OK par les centres des cercles générateurs, elle paſſera par le point touchant G; & ſi l'on tire KL perpendiculaire ſur MG, on formera les angles égaux GKL, GOB; & partant l'arc IG qui eſt le double de la meſure de l'angle GKL, ſera à l'arc GB meſure de l'angle GOB, comme le diamétre BN eſt au rayon OB. D'où il ſuit que pour déterminer ſur le demi-cercle BGN le point G, où il touche l'arc qui lui ſert de baſe lorſque le point décrivant M tombe ſur celui de la plus grande largeur; il faut couper le demi-cercle BGN en un point G, enſorte qu'ayant tiré par le point donné M la corde IG, l'arc IG ſoit à l'arc BG en raiſon donnée de BN à

OB. La queſtion ſe réduit donc à un Problême de la géométrie commune qui ſe peut toujours réſoudre géométriquement, lorſque la raiſon donnée eſt de nombre à nombre ; mais avec le ſecours des lignes dont l'équation eſt plus ou moins élevée, ſelon que la raiſon eſt plus ou moins composée.

Si l'on ſuppoſe que le rayon OB devienne infini, comme il arrive lorſque la baſe BGN devient une ligne droite ; il s'enſuit que l'arc IG ſera infiniment petit par rapport à l'arc GB. D'où l'on voit que la ſécante MIG devient alors la tangente MT, lorſque le point décrivant M tombe au dehors du cercle mobile ; & qu'il ne peut y avoir de point de plus grande largeur, lorſqu'il tombe au dedans.

Lorſque le point M tombe ſur la circonférence en N, il ne faut que diviſer la demi-circonférence BGN en raiſon donnée de BN à OB au point G. Car le point G ainſi trouvé, ſera celui où le cercle mobile BGN touche la baſe, lorſque le point décrivant tombe ſur le point cherché.

LEMME II.

176. EN *tout triangle* BAC, (*Fig.* 137. *Pl.* 7.) *dont les angles* ABC, ACB, & CAD *complément à deux droits de l'angle obtus* BAC, *ſont infiniment petits ; je dis que ces angles ont même rapport entr'eux que les côtés* AC, AB, BC, *auſquels ils ſont oppoſés.*

Car ſi l'on circonſcrit un cercle autour du

triangle BAC, les arcs AC, AB, BAC, qui meſurent les doubles de ces angles, ſeront infiniment petits, & ne différeront (*Art.* 3.) point par conſéquent de leurs cordes ou ſoutendantes.

Si les côtés AC, AB, BC du triangle BAC, ne ſont pas infiniment petits, mais qu'ils ayent une grandeur finie : il s'enſuit que le cercle circonſcrit doit être infiniment grand; puiſque les arcs AC, AB, BAC, qui ont une grandeur finie, doivent être infiniment petits par rapport à ce cercle, étant les meſures d'angles infiniment petits.

PROPOSITION IV.

PROBLÉME.

177. LES *mêmes choſes étant poſées ; il faut déterminer ſur chaque perpendiculaire* MG, (*Fig.* 135. 136. *Pl.* 7.) *le point* C *où elle touche la développée de la roulette.*

Ayant imaginé une autre perpendiculaire *mg* infiniment proche de MG, & qui la coupe par conſéquent au point cherché C, on tirera la droite G*m* ; & ayant pris ſur la circonférence du cercle mobile le petit arc G*g* égal à l'arc G*g* de l'immobile, on menera les droites M*g*, I*g*, K*g*, O*g*. Cela poſé, ſi l'on regarde les petits arcs G*g*, G*g* comme de petites droites perpendiculaires ſur les rayons K*g*, O*g*, il eſt clair que le petit arc G*g* du cercle mobile tombant ſur l'arc G*g* de l'immobile, le point décrivant M tombera ſur *m*, enſorte que le triangle GM*g* ſe confondra

avec le triangle Gmg. D'où l'on voit que l'angle MGm eſt égal à l'angle $gGg = GKg + GOg$; puiſqu'ajoutant de part & d'autre les mêmes angles KGg, OGg, l'on en compoſe deux droits.

Or nommant les données OG, b; KG, a; GM ou Gm, m; GI ou Ig, n; l'on trouve, *Premierement* $OG . KG :: GKg . GOg$. Et OG $(b) . OG + GK$ ou OK $(b + a) :: GKg . GKg + GOg$ ou $MGm = \frac{a+b}{b} GKg$. 2°. (*Ar.* 176.) $Ig . MI :: GMg . MgI$. Et $Ig \pm MI$ ou MG (m). $Ig . (n) :: GMg \pm MgI$ ou GIg ou $\frac{1}{2} GKg . GMg$ ou $Gmg = \frac{n}{2m} GKg$. 3°. (*Ibid*) L'angle MCm ou $MGm - Gmg \left(\overline{\frac{a+b}{b} - \frac{n}{2m} GKg}\right) . Gmg \left(\frac{n}{2m} GKg\right) :: Gm$ $(m) . GC = \frac{bmn}{2am + 2bm - bn}$. Et par conſéquent le rayon cherché MC de la développée ſera $= \frac{2amm + 2bmm}{2am + 2bm - bn}$.

Si l'on ſuppoſe que le rayon $OG(b)$ du cercle immobile devienne infini, ſa circonférence deviendra une ligne droite; & en effaçant les termes $2amm$, $2am$, parce qu'ils ſont nuls par rapport aux autres $2bmm$, $2bm - bn$, l'on aura $MC = \frac{2mm}{2m - n}$.

COROLLAIRE I.

178. De ce que l'angle $MGm = \frac{a+b}{b} GKg$, & de ce que les arcs de différens cercles ſont

entr'eux en raiſon compoſée des rayons & des angles qu'ils meſurent; il ſuit que $Gg . Mm :: KG \times GKg . MG \times \frac{a+b}{b} GKg$. Et par conſéquent auſſi que $KG \times Mm = \frac{a+b}{b} MG \times Gg$; ou (ce qui eſt la même choſe) que $KG \times Mm . MG \times Gg ::$ OK ($a+b$). OG (b). qui eſt une raiſon conſtante. D'où l'on voit que la dimenſion de la portion AM de la demi-roulette AMD, dépend de la ſomme des $MG \times Gg$ dans l'arc GB ; & c'eſt ce que M. *Paſcal* a démontré à l'égard des roulettes qui ont pour baſes des lignes droites.

M. *Varignon* eſt tombé dans cette même propriété par une voie très-différente de celle-ci.

COROLLAIRE II.

179. LORSQUE le point décrivant M. (*Fig.* 135. *Pl.* 7.) tombe hors de la circonférence du cercle mobile, il arrive néceſſairement l'un des trois cas ſuivans. Car menant la tangente MT, le point touchant G tombera 1°. Sur l'arc TB, comme l'on a ſuppoſé dans la figure en faiſant le calcul; & alors MC ($\frac{2amm + 2bmm}{2am + 2bm - bn}$) ſurpaſſera toujours MG (m). 2°. Sur le point touchant T; & l'on aura pour lors MC ($\frac{2amm + 2bmm}{2am + 2bm - bn}$) $= m$, puiſque IG (n) s'évanouit. 3°. Sur l'arc TN, & alors la valeur de GI (n) devenant négative de poſitive qu'elle étoit, l'on aura MC $= \frac{2amm + 2bmm}{2am + 2bm + bn}$: de ſorte que MC ſera moindre

que MG (m), & toujours poſitif. D'où il eſt évident que dans tous ces cas, la valeur du rayon MC de la développée eſt toujours poſitive.

COROLLAIRE III.

180. LORSQUE le point décrivant M (*Fig.* 136. *Pl.* 7.) tombe au dedans de la circonférence du cercle mobile, on a toujours $MC = \frac{2amm + 2bmm}{2am + 2bm - bn}$; & il peut arriver que bn ſurpaſſe $2am + 2bm$, & qu'ainſi la valeur du rayon MC de la développée ſoit négative : d'où l'on voit que lorſqu'elle ceſſe d'être poſitive pour devenir négative, comme il arrive (*Art.* 81.) lorſque le point M devient un point d'inflexion, il faut néceſſairement alors que $bn = 2am + 2bm$; & partant que $MI \times MG (mn - mm) = \frac{2amm + bmm}{b}$. Or ſi l'on nomme la donnée KM, c; l'on aura par la propriété du cercle $MI \times MG (\frac{2amm + bmm}{b}) = BM \times MN (aa - cc)$, ce qui donne l'inconnue MG $(m) = \sqrt{\frac{aab - bcc}{2a + b}}$. Donc ſi l'on décrit du point donné M comme centre, & de l'intervalle MG $= \sqrt{\frac{aab - bcc}{2a + b}}$, un cercle ; il coupera le cercle mobile en un point G, où il touchera le cercle immobile qui lui ſert de baſe, lorſque le point décrivant M tombera ſur le point d'inflexion F.

Si l'on mene MR perpendiculaire ſur BN ; il eſt clair que cette MG ($\sqrt{\frac{aab - bcc}{2a + b}}$) ſera moindre

que MR ($\sqrt{aa - cc}$), & qu'elle lui doit être égale lorſque b devient infinie, c'eſt-à-dire, lorſque la baſe de la roulette devient une ligne droite.

Il eſt à remarquer, qu'afin que le cercle décrit du rayon MG coupe le cercle mobile, il faut que MG ſurpaſſe MN, c'eſt-à-dire, que $\sqrt{\frac{aab - bcc}{2a + b}}$ ſurpaſſe $a - c$; & qu'ainſi KM (c) ſurpaſſe $\frac{aa}{a + b}$. D'où il eſt manifeſte qu'afin qu'il y ait un point d'inflexion dans la roulette AMD, il faut que KM ſoit moindre que KN, & plus grande que $\frac{aa}{a + b}$.

LEMME. III.

181. SOIENT *deux triangles* ABb, CDd (*Fig.* 138. *Pl.* 8.) *qui ayent chacun un de leurs côtés* Bb, Dd *infiniment petit par rapport aux autres : je dis que le triangle* ABb *eſt au triangle* CDd *en raiſon composée de l'angle* BAb *à l'angle* DCd, & *du quarré du côté* AB *ou* Ab *au quarré du côté* CD *ou* Cd.

Car ſi l'on décrit des centres A, C, & des intervalles AB, CD, les arcs de cercle BE, DF; il eſt clair (*Art.* 2.) que les triangles AB*b*, CD*d* ne différeront point des ſecteurs de cercles ABE, CDF. Donc, &c.

Si les côtés AB, CD ſont égaux, les triangles AB*b*, CD*d* ſeront entr'eux comme leurs angles BA*b*, DC*d*.

PROPOSITION V.

PROBLÉME.

182. LES *mêmes choses étant toujours posées ; on demande la quadrature de l'espace* MGBA, *(Fig. 135. Pl. 7.) renfermé par les perpendiculaires* MG, BA *à la roulette, par l'arc* GB, *& par la portion* AM *de la demi-roulette* AMD, *en supposant la quadrature du cercle.*

L'angle GMg ($\frac{n}{2m}$ GKg) est à l'angle MGm ($\frac{a+b}{b}$ GKg), comme (*Art.* 181.) le petit triangle MGg qui a pour base l'arc Gg du cercle mobile, au petit triangle ou secteur GMm ; & partant le secteur GM$m = \frac{2m}{n}$ MG$g \times \frac{a+b}{b} = \frac{2a+2b}{b}$ $\times$MG$g + \frac{2ap+2bp}{bn} \times$ MGg en nommant MI, p, & mettant pour m sa valeur $p+n$. Or (*Art.* 181.) le petit triangle ou secteur KGg est au petit triangle MGg en raison composée du quarré de KG au quarré de MG, & de l'angle GKg à l'angle GMg ; c'est-à-dire :: $aa \times$ GKg. $mm \times \frac{n}{2m}$ GKg. & partant le petit triangle MGg $= \frac{mn}{2aa}$ KGg. Mettant donc cette valeur à la place du triangle MGg dans $\frac{2ap+2bp}{bn}$ MGg, l'on aura le secteur GM$m = \frac{2a+2b}{b}$ MGg +

$\frac{\overline{a+b} \times pm}{aab}$ KGg. Mais à cause du cercle, GM × MI (pm) = BM × MN ($cc - aa$) qui est une quantité constante, & qui demeure toujours la même en quelqu'endroit que se trouve le point décrivant M; & par conséquent GMm + MGg ou mGg, c'est-à-dire, le petit espace de la roulette GMmg = $\frac{2a + 3b}{b}$ MGg + $\frac{\overline{a+b} \times \overline{cc - aa}}{aab}$ KGg. Donc puisque GMmg est la différence de l'espace de la roulette MGBA, & MGg, celle de l'espace circulaire MGB, renfermé par les droites MG, MB, & par l'arc GB, & que de plus le petit secteur KGg est la différence du secteur KGB; il s'ensuit (*Art.* 96.) que l'espace de la roulette MGBA = $\frac{2a + 3b}{b}$ MGB + $\frac{\overline{a+b} \times \overline{cc - aa}}{aab}$ KGB. Ce qu'il falloit trouver.

Lorsque le point décrivant M (*Fig.* 139. *Pl.* 8.) tombe hors la circonférence BGN du cercle mobile, & que le point touchant G tombe sur l'arc NT; il est visible (*Art.* 180.) que les perpendiculaires MG, mg s'entrecoupent en un point C, & qu'on a pour lors $m = p - n$. D'où il suit que le petit secteur GMm = $-\frac{2a - 2b}{b}$ MGg + $\frac{2ap + 2bp}{bn}$ MGg = $-\frac{2a - 2b}{b}$ MGg + $\frac{amp + bmp}{aab}$ KGg, en mettant comme auparavant pour le petit triangle MGg sa valeur $\frac{mn}{2aa}$ KGg;

&

& partant que $GMm - MGg$ ou mGg, c'eſt-à-dire $MCm - GCg = -\frac{2a-3b}{b} MGg + \frac{\overline{a+b} \times \overline{cc-aa}}{aab} KGg$, en mettant pour pm ſa valeur $cc - aa$. Or ſuppoſant que TH ſoit la poſition de la tangente TM du cercle mobile, lorſque ſon point T touche la baſe au point T; il eſt clair que $MCm - GCg = MGTH - mgTH$, c'eſt-à-dire, la différence de l'eſpace MGTH; & que MGg eſt celle de MGT, de même que KGg celle de KGT. Donc (*Art.* 96.) l'eſpace MGTH $= -\frac{2a-3b}{b} MGT + \frac{\overline{a+b} \times \overline{cc-aa}}{aab} KGT$. Mais, comme l'on vient de prouver, l'eſpace $HTBA = \frac{2a+3b}{b} MTB + \frac{\overline{a+b} \times \overline{cc-aa}}{aab} KTB$. Et partant on aura toujours & dans tous les cas l'eſpace MGBA (MGTH + HTBA) $= \frac{2a+3b}{b} \overline{MTB - MGT}$ ou $MGB + \frac{\overline{a+b} \times \overline{cc-aa}}{aab} \overline{KGT} + \overline{KTB}$ ou KGB.

Donc l'eſpace entier DNBA (*Fig.* 135. *Pl.* 7.) renfermé par les deux perpendiculaires à la roulette DN, BA, par l'arc de cercle BGN, & par la demi-roulette AMD, eſt $= \overline{\frac{2a+3b}{b} + \frac{\overline{a+b} \times \overline{cc-aa}}{aab}} \times KNGB$; puiſque le ſecteur KGB & l'eſpace circulaire MGB deviennent chacun le demi-cercle KNGB, lorſque le point touchant G tombe au point N.

Lorſque le point décrivant M (*Fig.* 136. *Pl.* 7.) tombe au dedans du cercle mobile, il faut mettre $aa - cc$ à la place de $cc - aa$ dans les formules précédentes ; parce qu'alors $BM \times MN = aa - cc$.

Si l'on fait $c = a$, l'on aura la quadrature des roulettes qui ont leur point décrivant ſur la circonférence du cercle mobile ; & ſi l'on ſuppoſe b infinie, l'on aura la quadrature de celles qui ont pour baſes les lignes droites.

AUTRE SOLUTION.

183. ON décrit du rayon OD (*Fig.* 140. *Pl.* 7.) l'arc DV, & des diametres AV, BN les demi-cercles AEV, BSN ; & ayant décrit à diſcrétion du centre O l'arc EM renfermé entre le demi-cercle AEV & la demi-roulette AMD, l'on mene l'appliquée EP. Il s'agit de trouver la quadrature de l'eſpace AEM compris entre les arcs AE, EM, & la portion AM de la demi-roulette AMD.

Pour cela, ſoit un autre arc *em* concentrique & infiniment proche de EM, une autre appliquée *ep*, une autre O*e* qui rencontre l'arc ME prolongé (s'il eſt néceſſaire) au point F. Soient nommées les variables OE, z ; VP, u ; l'arc AE, x ; & comme auparavant les conſtantes OB, b ; KB ou KN, a ; KV ou KA, c : l'on aura $Fe = dz$, $Pp = du$, $OP = a + b - c + u$, $\overline{PE}^2 = 2cu - uu$, l'arc EM (*Art.* 172.) $= \frac{axz}{bc}$; &

partant le rectangle fait de l'arc EM par la petite droite F*e*, c'est-à-dire (*Art.* 2.) le petit espace EM*me* $= \frac{axzdz}{bc}$. Or à cause du triangle rectangle OPE; $zz = aa + 2ab + bb - 2ac - 2bc + cc + 2au + 2bu$, dont la différence donne $zdz = adu + bdu$. Mettant donc cette valeur à la place de zdz dans $\frac{axzdz}{bc}$, l'on aura le petit espace

EM*me* $= \frac{aaxdu + abxdu}{bc}$.

Maintenant si l'on décrit la demi-roulette AHT par la révolution du demi-cercle AEV sur la droite VT perpendiculaire à VA, & qu'on prolonge les appliquées PE, *pe* jusqu'à ce qu'elles la rencontrent aux points H, *h* : il est clair (*Art.* 172.) que EH $\times$ P*p*, c'est à-dire, le petit espace EH*he* $= xdu$; & qu'ainsi EM*me* $(\frac{aaxdu + abxdu}{bc})$. EH*he* (xdu) : : $aa + ab \,.\, bc$. qui est une raison constante. Or puisque cela arrive toujours en quelqu'endroit que se trouve l'arc EM, il s'ensuit que la somme de tous les petits espaces EM*me*, c'est-à-dire l'espace AEM, est à la somme de tous les petits espaces EH*he*, c'est-à dire, à l'espace AEH : : $aa + ab \,.\, bc$. Mais l'on a (*Art.* 99.) la quadrature de l'espace AEH dépendamment de celle du cercle; & partant aussi celle de l'espace cherché AEM.

Ceci se peut aussi démontrer sans aucun calcul, comme j'ai fait voir dans les Actes de Leypsic au mois d'Août de l'année 1695.

On peut encore trouver la quadrature de l'eſpace AEH ſans avoir recours à l'art. 99. Car ſi l'on acheve les rectangles PQ, *pq*, l'on aura Qq ou $HR \, . \, Pp$ ou $Rh :: EP \, . \, PA$ ou HQ. puiſque (*Art.* 18.) la tangente en H eſt parallele à la corde AE; & partant $HQ \times Qq = EP \times Pp$, c'eſt-à-dire, que les petits eſpaces $HQqh$, $EPpe$ ſont toujours égaux entr'eux. D'où il ſuit que l'eſpace AHQ renfermé par les perpendiculaires AQ, QH, & par la portion AH de la demi-roulette AHT, eſt égal à l'eſpace APE renfermé par les perpendiculaires AP, PE, & par l'arc AE. L'eſpace AEH ſera donc égal au rectangle PQ moins le double de l'eſpace circulaire APE; c'eſt-à dire, au rectangle fait de PE par KA plus ou moins le rectangle fait de KP par l'arc AE, ſelon que le point P tombe au deſſous ou au deſſus du centre. Et par conſéquent l'eſpace cherché AEM $= \frac{aa + ab}{bc} \overline{PE \times KA \pm KP \times AE}$.

COROLLAIRE I.

184. LORSQUE le point P tombe en K, le rectangle $KP \times AE$ s'évanouit, & le rectangle $PE \times KA$ devient égal au quarré de KA: d'où l'on voit que l'eſpace AEM eſt alors $= \frac{aac + abc}{b}$; & par conſéquent il eſt quarrable abſolument & indépendamment de la quadrature du cercle.

COROLLAIRE. II.

185. Si l'on ajoute à l'eſpace AEM le ſecteur AKE, l'eſpace AKEM renfermé par les rayons AK, KE, par l'arc EM, & par la portion AM de la demi-roulette AMD, ſe trouve (lorſque le point P tombe au deſſus du centre K) $= \frac{bcc + 2aac + 2abc - 2aau - 2abu}{2bc}$ AE $+ \frac{aa + ab}{bc}$ PE×KA; & partant ſi l'on prend VP (u) $\frac{2aac + 2abc + bcc}{2aa + 2ab}$ (ce qui rend nulle la valeur de $\frac{bcc + 2aac + 2abc - 2aau - 2abu}{2bc}$ AE), l'on aura l'eſpace AKEM $= \frac{aa + ab}{bc}$ PE×KA. D'où l'on voit que ſa quadrature eſt encore indépendante de celle du cercle.

Il eſt viſible qu'entre tous les eſpaces AEM & AKEM, il ne peut y avoir que les deux que l'on vient de marquer, dont la quadrature ſoit abſolue.

AVERTISSEMENT.

Tout ce que l'on vient de démontrer à l'égard des roulettes extérieures ſe doit auſſi entendre des intérieures, c'eſt-à-dire, de celles dont le cercle mobile roule au dedans de l'immobile; en obſervant que les rayons KB (a), KV (c) *deviennent négatifs de poſitifs qu'ils étoient. C'eſt pourquoi il faudra changer dans les formules précédentes, les ſignes des termes où* a *&* c *ſe rencontrent avec une dimenſion impaire.*

REMARQUE.

186. IL y a certaines courbes qui paroissent avoir un point d'inflexion, & qui cependant n'en ont point ; ce que je crois à propos d'expliquer par un exemple, car cela pourroit faire quelque difficulté.

Soit la courbe géométrique NDN (*Fig.* 141. *Pl.* 7.), dont la nature est exprimée par l'équation $z = \frac{xx - aa}{\sqrt{2xx - aa}}$ (AP $= x$, PN $= z$), dans laquelle il est clair 1°. Que x étant égale à a ; PN (z) s'évanouit. 2° Que x surpassant a, la valeur de z est positive ; & qu'au contraire lorsqu'il est moindre, elle est négative. 3°. Que lorsque $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa}$, la valeur de PN est infinie. D'où l'on voit que la courbe NDN passe de part & d'autre de son axe en le coupant en un point D tel que AD $= a$; & qu'elle a pour asymptote la perpendiculaire BG menée par le point B tel que AB $= \sqrt{\frac{1}{2}aa}$.

Si l'on décrit à présent une autre courbe EDF, ensorte qu'ayant mené à discrétion la perpendiculaire MPN, le rectangle fait de l'appliquée PM par la constante AD, soit toujours égal à l'espace correspondant DPN ; il est visible qu'en nommant PM, y ; & prenant les différences, l'on aura AD $\times$ Rm (ady) $=$ NPpn ou NP $\times$ Pp ($\frac{xxdx - aadx}{\sqrt{2xx - aa}}$) ; & partant R$m$ (dy). Pp ou RM (dx) : : PN. AD. D'où il suit que la courbe EDF touche l'a-

ſymptote BG prolongée de l'autre côté de B en un point E, & l'axe AP au point D ; & qu'ainſi elle doit avoir un point d'infléxion en D. Cependant on trouve (*Art.* 78.) $-\frac{x^3}{2aa}$ pour la valeur du rayon de ſa développée, laquelle eſt toujours négative, & devient égale à $-\frac{1}{2}a$ lorſque le point M tombe en D : d'où l'on doit conclure (*Art.* 81.) que la courbe qui paſſe par tous les points M eſt toujours convexe vers l'axe AP, & qu'elle n'a pas de point d'infléxion en D. Comment donc accorder tout cela ? En voici le dénouement.

Si l'on prend PM du même côté que PN, on formera une autre courbe GDH qui ſera toute pareille à EDF, & qui en doit faire partie ; puiſque ſa génération eſt la même. Cela étant ainſi, l'on doit penſer que les parties qui compoſent la courbe entiére ne ſont pas EDF, GDH comme l'on s'étoit imaginé, mais bien EDH, GDF qui ſe touchent au point D ; car tout s'accorde parfaitement dans cette derniere ſuppoſition. Ceci ſe confirme encore par cet exemple.

Soit la courbe DMG (*Fig.* 142. *Pl.* 7.), qui ait pour équation $y^4 = x^4 + aaxx - b^4$ ($AP = x$, $PM = y$). Il ſuit de cette équation que la courbe entiére a deux parties EDH, GDF oppoſées l'une à l'autre comme l'hyperbole ordinaire, enſorte que leur diſtance DD ou $2AD = \sqrt{-2aa + 2\sqrt{a^4 + 4b^4}}$.

Si l'on ſuppoſe que *b* s'évanouiſſe, la diſtance DD (*Fig.* 143. *Pl.* 7.) s'évanouira auſſi; & partant les deux parties EDH, GDF ſe toucheront au point D : de ſorte qu'on pourroit penſer à préſent que cette courbe a un point d'inflexion ou de rebrouſſement en D, ſelon qu'on imagineroit que ſes parties ſeroient EDF, GDH ou EDG, HDF. Mais l'on ſe détromperoit aiſément, en cherchant le rayon de la développée; car l'on trouveroit qu'il ſeroit toujours poſitif, & qu'il deviendroit égal à $\frac{1}{2}a$ dans le point D.

On peut remarquer en paſſant, (*Fig.* 141. *Pl.* 7.) que la quadrature de l'eſpace DPN dépend de celle de l'hyperbole : ou (ce qui revient au même) de la rectification de la parabole; & que la portion de courbe DMF ſatisfait au Problême propoſé par M. *Bernoulli* dans le Tome ſecond des Supplémens des Actes de Leipſic, page 291. (*Conſultez la Note* 54e.)



SECTION X.

Nouvelle maniére de ſe ſervir du calcul des différences dans les courbes géométriques, d'où l'on déduit la Méthode de Mrs. Deſcartes & Hudde.

DÉFINITION.

SOIT une ligne courbe ADB (*Fig.* 144. 145. 146. *Pl.* 8.) telle que les paralleles KMN à ſon diamètre AB la rencontrent en deux points M, N ; & ſoit entendue la partie interceptée MN ou PQ devenir infiniment petite. Elle ſera nommée alors la *Différenee* de la coupée AP, ou KM.

COROLLAIRE I.

187. LORSQUE la partie MN ou PQ devient infiniment petite ; il eſt clair que les coupées AP, AQ deviennent égales chacune à AE, & que les points M, N ſe réuniſſent en un point D : enſorte que l'appliquée ED eſt la plus grande ou la moindre de toutes ſes ſemblables PM, NQ.

COROLLAIRE II.

188. IL eſt clair qu'entre toutes les coupées AP, il n'y a que AE qui ait une différence ; parce qu'il n'y a qu'en ce cas où PQ devienne infiniment petite.

COROLLAIRE III.

189. SI l'on nomme les indéterminées AP ou KM, x; PM ou AK, y; il eſt évident que AK (y) demeurant la même, il doit y avoir deux valeurs différentes de x, ſçavoir KM, KN ou AP, AQ. C'eſt pourquoi il faut que l'équation qui exprime la nature de la courbe ADB ſoit délivrée d'incommenſurables, afin que la même inconnue x qui en marque les racines (car on regarde y comme connue) puiſſe avoir différentes valeurs. Ce qu'il faut obſerver dans la ſuite.

PROPOSITION I.

PROBLÊME.

190. LA *nature de la courbe géométrique* ADB *étant donnée; déterminer la plus grande ou la moindre de ſes appliquées* ED.

Si l'on prend la différence de l'équation qui exprime la nature de la courbe, en traitant y comme conſtante, & x comme variable; il eſt clair (*Art.* 188.) qu'on formera une nouvelle équation qui aura pour une de ſes racines x, une valeur AE, telle que l'appliquée ED ſera la plus grande ou la moindre de toutes ſes ſemblables.

Soit, par exemple, $x^3 + y^3 = axy$, dont la différence, en traitant x comme variable, & y comme conſtante, donne $3xxdx = aydx$; & par-

tant $y = \frac{3xx}{a}$. Si l'on ſubſtitue cette valeur à la place de y dans l'équation à la courbe $x^3 + y^3 = axy$; l'on aura pour x une valeur AE $= \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$, telle que l'appliquée ED ſera la plus grande de toutes ſes ſemblables, de même qu'on l'a déja trouvé art. 48.

Il eſt évident que l'on détermine de même non-ſeulement les points D, lorſque les appliquées ED ſont perpendiculaires ou tangentes de la courbe ADB ; mais auſſi lorſqu'elles ſont obliques ſur la courbe, c'eſt-à-dire, lorſque les points D ſont des points de rebrouſſement de la premiere ou ſeconde ſorte. D'où l'on voit que cette nouvelle maniere de conſidérer les différences dans les courbes géométriques eſt plus ſimple & moins embarraſſante en quelques rencontres, que la (*Sect.* 3.) premiere.

REMARQUE.

191. On peut remarquer dans les courbes rebrouſſantes, que les PM (*Fig.* 146. *Pl.* 8.) paralleles à AK ; les rencontrent en deux points M, O, de même que les KM paralleles AP, font en M, N : de ſorte que AP (x) demeurant la même, y a deux différentes valeurs PM, PO. C'eſt pourquoi l'on peut traiter x comme conſtante, & y comme variable, en prenant la différence de l'équation qui exprime la nature de cette courbe. D'où l'on voit que ſi l'on traite x & y comme variables, en prenant cette diffé-

rence, il faudra que tous les termes qui multiplient *dx* d'une part, & tous ceux qui mulplient *dy* d'une autre part, ſoient égaux à zero. Mais il faut bien prendre garde que *dx* & *dy* marquent ici les différences de deux appliquées qui partent d'un même point, & non pas (comme ci-devant Sect. 3.) la différence de deux appliquées infiniment proches.

COROLLAIRE.

192. Si après avoir ordonné l'équation qui exprime la nature de la courbe dans laquelle il n'y a que l'inconnue x de variable, l'on en prend la différence ; il eſt clair 1°. Qu'on ne fait autre choſe que de multiplier chaque terme par l'expoſant de la puiſſance de x, & par la différence dx, & le diviſer enſuite par x. 2°. Que cette diviſion par x, auſſi-bien que la multiplication par dx, peut être négligée, parce qu'elle eſt la même dans tous les termes. 3°. Que les expoſans des puiſſances de x font une progreſſion arithmétique, dont le premier terme eſt l'expoſant de ſa plus grande puiſſance, & le dernier eſt zero, car on ſuppoſe qu'on ait marqué par une étoile les termes qui peuvent manquer dans l'équation.

Soit, par exemple, $x^3 * - ayx + y^3 = 0$. Si l'on multiplie chaque terme par ceux de la progreſſion arithmétique 3, 2, 1, 0 ; l'on formera l'équation nouvelle $3x^3 - ayx = 0$.

$$x^3 \quad * - ayx + y^3 = o.$$
$$3, \quad 2, \quad 1, \quad o.$$
$$3x^3 \quad * - ayx \quad * = o.$$

D'où l'on tire $y = \frac{3xx}{a}$, de même que l'on auroit trouvé en prenant la différence à la maniére accoutumée.

Cela supposé, je dis qu'au lieu de la progression arithmétique 3, 2, 1, 0, l'on peut se servir de telle autre progression arithmétique qu'on voudra : $m+3, m+2, m+1, m+0$, ou m (l'on désigne par m un nombre quelconque entier ou rompu, positif ou négatif). Car multipliant $x^3 * - ayx + y^3 = o$ par x^m, l'on aura $x^{m+3}*$, &c. $= o$, dont les termes doivent être être multipliés par ceux de la progression $m+3$, $m+2$, $m+1$, m. chacun par son correspondant pour en avoir la différence.

$$x^{m+3} \quad * \quad - ayx^{m+1} \quad + y^3x^m = o.$$
$$m+3, \quad m+2 \quad m+1, \quad m.$$
$$\overline{m+3}\,x^{m+3} \; * \; - \overline{m+1}\,ayx^{m+1} + my^3x^m = o.$$

Ce qui donnera $\overline{m+3}\,x^{m+3} - \overline{m+1}\,ayx^{m+1} + my^3x^m = o$; & en divisant par x^m, il viendra $\overline{m+3}\,x^3 - \overline{m+1}\,ayx + my^3 = o$, comme l'on auroit trouvé d'abord en multipliant simplement l'égalité proposée par la progression $m+3$, $m+2$, $m+1$, m.

Si $m = -3$, la progression sera $o, -1, -2, -3$; & l'équation sera $2ayx - 3y^3 = o$. Si $m = -1$, la progression sera 2, 1, 0, -1 ; & l'équation $2x^3 - y^3 = o$.

On peut changer de ſignes tous les termes de la progreſſion, c'eſt-à-dire, qu'au lieu de o, — 1, — 2, — 3, & 2, 1, o, — 1, l'on peut prendre o, 1, 2, 3, & — 2, — 1, o, 1; parce qu'on ne fait par là que changer de ſignes tous les termes de la nouvelle équation qui doit être égalée à zero. Et en effet, au lieu de $2ayx - 3y^3 = o$, $2x^3 - y^3 = o$, l'on auroit $- 2ayx + 3y^3 = o$, $- 2x^3 + y^3 = o$; ce qui eſt la même choſe.

Or il eſt viſible que ce que l'on vient de démontrer à l'égard de cet exemple, s'appliquera de même maniére à tous les autres. D'où il ſuit que ſi après avoir ordonné une équation qui doit avoir deux racines egales entr'elles, l'on en multiplie les termes par ceux d'une progreſſion arithmétique arbitraire, l'on formera une nouvelle équation qui renfermera entre ſes racines une des deux égales de la premiére. Par la même raiſon, ſi cette nouvelle équation doit avoir encore deux racines égales, & qu'on la multiplie par une progreſſion arithmétique, l'on en formera une troiſieme qui aura entre ſes racines une des deux égales de la ſeconde; & ainſi de ſuite. De ſorte que ſi l'on multiplie une équation qui doit avoir trois racines égales, par le produit de deux progreſſions arithmétiques, l'on en formera une nouvelle qui aura entre ſes racines une des trois égales de la premiere; & de même ſi l'équation doit avoir quatre racines égales, il la faudra multiplier par le produit de trois progreſſions arithmétiques; ſi cinq, par le produit de quatre, &c.

C'est là précisément en quoi consiste la Méthode de M. *Hudde*.

PROPOSITION II.

PROBLÉME.

193. D'UN *point donné* T (*Fig.* 147. *Pl.* 8.) *sur le diamètre* AB, *ou du point donné* H *sur* AH *parallele aux appliquées; mener la tangente* THM.

Ayant mené par le point touchant M l'appliquée MP, & nommé AT, s; AH, t; dont l'une ou l'autre est donnée; & les inconnues AP, x; PM, y: les triangles semblables TAH, TPM donneront $y = \frac{st + tx}{s}$, $x = \frac{sy - st}{t}$; & mettant ces valeurs à la place de y ou de x dans l'équation donnée, qui exprime la nature de la courbe AMD, l'on en formera une nouvelle dans laquelle y ou x ne se rencontrera plus.

Si l'on mene à présent une ligne droite TD qui coupe la droite AH en G, & la courbe AMD en deux points N, D, desquels l'on abbaisse les appliquées NQ, DB; il est évident que t exprimant AG dans l'équation précédente, x ou y aura deux valeurs AQ, AB, ou NQ, DB, lesquelles deviennent égales entr'elles, sçavoir à la cherchée AP ou PM lorsque t exprime AH, c'est-à-dire, lorsque la sécante TDN devient la tangente TM. D'où il suit que cette équation doit avoir deux racines égales. C'est pourquoi on la multipliera par une progression arithmétique

arbitraire ; ce que l'on réiterera, s'il est nécessaire, en multipliant de nouveau cette même équation par une autre progression arithmétique quelconque, afin que par la comparaison des équations qui en résultent, l'on en puisse trouver une qui ne renferme que l'inconnue x ou y, avec la donnée s ou t. L'exemple qui suit éclaircira suffisamment cette Méthode.

EXEMPLE.

194. SOIT $ax = yy$ l'équation qui exprime la nature de la courbe AMD. Si l'on met à la place de x sa valeur $\frac{sy - st}{t}$, l'on aura tyy, &c. qui doit avoir deux racines égales.

$$\begin{array}{l} tyy - asy + ast = o. \\ \quad 1, \quad\quad o, - 1. \\ \hline tyy \quad\quad * \quad - ast = o. \end{array}$$

C'est pourquoi multipliant par ordre ces termes par ceux de la progression arithmétique $1, o, - 1$, l'on trouvera $as = yy = ax$; & partant AP $(x) = s$. D'où l'on voit qu'en prenant AP = AT ; & menant l'appliquée PM, la ligne TM sera tangente en M. Mais si au lieu de AT (s), c'est AH (t) qui est donnée, l'on multipliera la même équation tyy, &c. par cette autre progression $o, 1, 2$, & l'on aura la cherchée PM $(y) = 2t$.

On auroit trouvé la même construction en mettant pour y sa valeur $\frac{st + tx}{s}$ dans $ax = yy$. Car il vient $ttxx$, &c. dont les termes multipliés par

1, o, -1, donnent $xx = ss$; & par conséquent AP (x) $= s$.

COROLLAIRE.

195. Si l'on veut à présent que le point touchant M soit donné, & qu'il faille trouver le point T ou H, dans lequel la tangente MT rencontre le diamètre AB ou la parallele AH aux appliquées; il n'y a qu'à regarder dans la derniere équation, qui exprime la valeur de l'inconnue x ou y par rapport à la donnée s ou t, cette derniere comme l'inconnue, & x ou y comme connue.

PROPOSITION III.

PROBLÉME.

196. La *nature de la courbe géométrique* AFD (*Fig.* 148. *Pl.* 8.) *étant donnée; déterminer son point d'infléxion* F.

Ayant mené par le point cherché F, l'appliquée FE avec la tangente FL, par le point A (origine des x) la parallele AK aux appliquées, & nommé les inconnues LA, s; AK, t; AE, x; EF, y: les triangles semblables LAK, LEF donneront encore $y = \frac{st + tx}{s}$, & $x = \frac{sy - st}{t}$; de sorte que mettant ces valeurs à la place de y ou x dans l'équation à la courbe, l'on en formera une nouvelle dans laquelle y ou x ne se rencontrera plus, de même que dans la proposition précédente.

Si l'on mene à présent une ligne droite TD qui coupe la droite AK en H, qui touche la courbe AFD en M, & la coupe en D, d'où l'on abaisse les appliquées MP, DB : il est évident 1°. Que *s* exprimant AT ; & *t*, AH ; l'équation que l'on vient de trouver, doit avoir deux racines égales, sçavoir (*Art.* 193.) chacune à AP ou à PM selon qu'on a fait évanouir *y* ou *x*, & une autre AB, ou BD. 2°. Que *s* exprimant AL ; & *t*, AK ; le point touchant M se réunit avec le point d'intersection D dans le point cherché F : puisque (*Art.* 67.) la tangente LF doit toucher & couper la courbe dans le point d'infléxion F ; & qu'ainsi les valeurs AP, AB de *x*, ou PM, BD de *y* deviennent égales entr'elles, sçavoir, l'une & l'autre à la cherchée AE ou EF. D'où il suit que cette équation doit avoir trois racines égales. C'est pourquoi on la multipliera par le produit de deux progressions arithmétiques arbitraires ; ce que l'on réiterera, s'il est nécessaire, en la multipliant de même par un autre produit de deux progressions arithmétiques quelconques, afin que par la comparaison des équations qui en résultent, l'on puisse faire évanouir les inconnues *s* & *t*.

EXEMPLE.

197. SOIT $ayy = xyy + aax$ l'équation qui exprime la nature de la courbe AFD. Si l'on met à la place de *x* sa valeur $\frac{sy - st}{t}$, on formera l'équation $sy^3 - styy - atyy$, &c.

$$\begin{array}{l} sy^3 - styy + aasy - aast = o. \\ \qquad - at \\ 1, \quad o, \quad -1, \quad -2. \\ 3, \quad 2, \quad 1, \quad o. \\ \hline 3sy^3 \quad * \quad - aasy \quad * \quad = o. \end{array}$$

qui étant multipliée par 3, *o*, — 1, *o*, produit des deux progreſſions arithmétiques 1, *o*, — 1, — 2, & 3, 2, 1, *o*, donne $yy = \frac{1}{3}aa$; & mettant cette valeur dans l'équation à la courbe, l'on trouve l'inconnue AE (x) $= \frac{1}{4}a$. Ce qui revient à l'art. 68.

AUTRE SOLUTION.

198. ON peut encore réſoudre ce Problême en remarquant que du même point L ou K (*Fig.* 149. 150. *Pl.* 8.) on ne peut mener qu'une ſeule tangente LF ou KF; parce qu'elle touche en dehors la partie concave AF, & en dedans la convexe FD; au lieu que de tout autre point T ou H, pris ſur AL ou AK entre A & L ou A & K, l'on peut mener deux tangentes TM, TD ou HM, HD, l'une de la partie concave, & l'autre de la convexe : de ſorte qu'on peut conſidérer le point d'infléxion F comme la réunion des deux points touchans M & D. Si donc l'on ſuppoſe que AT (s) ou AH (t) ſoit donnée, & qu'on cherche (*Art.* 194.) la valeur de x ou y par rapport à s ou t; l'on aura une équation qui aura deux racines AP, AB, ou PM, BD qui deviennent égales chacune à la cherchée AE ou EF,

lorſque s exprime AL & t, AK. C'eſt pourquoi l'on multipliera cette équation par une progreſſion arithmétique arbitraire, &c.

EXEMPLE.

199. SOIT comme ci-deſſus, $ayy = xyy + aax$; l'on aura encore $sy^3 - styy - atyy + aasy - aast = o$, qui étant multipliée par la progreſſion arithmétique $1, o, -1, -2$, donne $y^3 * - aay - 2aat = o$, dans laquelle s ne ſe rencontre plus, & qui a deux racines inégales, ſçavoir PM, BD, lorſque t exprime AH, & deux égales chacune à la cherchée EF lorſque t exprime AK. C'eſt pourquoi multipliant de nouveau cette derniére équation par la progreſſion arithmétique $3, 2, 1, o$, l'on aura $3yy - aa = o$; & partant EF (y) $= \sqrt{\frac{1}{3}aa}$. Ce qu'il falloit trouver.

PROPOSITION IV.

PROBLÉME.

200. MENER *d'un point donné* C (*Fig.* 151. *Pl.* 8.) *hors une ligne courbe* AMD *une perpendiculaire* CM *à cette courbe.*

Ayant mené les perpendiculaires MP, CK ſur le diamètre AB, & décrit du centre C de l'intervalle CM un cercle; il eſt clair qu'il touchera la courbe AMD au point M. Nommant enſuite les inconnues AP, x; PM, y; CM, r; & les connues AK, s; KC t: l'on aura PK ou CE $= s - x$, ME $= y + t$; & à cauſe du triangle rectangle MEC, $y = -t + \sqrt{rr - ss + 2sx - xx}$,

$x = s - \sqrt{rr - tt - 2ty - yy}$: de ſorte que mettant ces valeurs à la place de y ou x dans l'équation à la courbe, l'on en formera une nouvelle dans laquelle y ou x ne ſe rencontrera plus.

Si l'on décrit à préſent du même centre C un autre cercle qui coupe la courbe en deux points N, D, d'où l'on abaiſſe les perpendiculaires NQ, DB; il eſt évident que r exprimant le rayon CN ou CD dans l'équation précédente, x ou y aura deux valeurs AQ, AB ou NQ, DB qui deviennent égales entr'elles, ſçavoir à la cherchée AP ou PM, lorſque r exprime le rayon CM. D'où il ſuit que cette équation doit avoir deux racines égales. C'eſt pourquoi on la multipliera, &c.

EXEMPLE.

201. SOIT $ax = yy$ l'équation qui exprime la nature de la courbe AMD, dans laquelle mettant pour x ſa valeur $s - \sqrt{rr - tt - 2ty - yy}$, l'on aura $as - yy = a\sqrt{rr - tt - 2ty - yy}$: de ſorte qu'en quarrant chaque membre, & ordonnant enſuite l'équation, l'on trouvera y^4, &c. qui doit avoir deux racines égales lorſque y exprime la cherchée PM.

$$\begin{array}{llllll} y^4 & * & -2asyy & +2aaty & +aass & =0. \\ & & +aa & & -aarr & \\ & & & & +aatt & \\ 4, & 3, & 2, & 1, & 0. & \\ \hline 4y^4 & * & -4asyy & +2aaty & * & =0. \\ & & +2aa & & & \end{array}$$

C'eſt pourquoi on la multipliera par la progreſſion arithmétique 4, 3, 2, 1, o, ce qui donnera $4y^3 - 4asy + 2aay + 2aat = o$, dont la réſolution fournira pour y la valeur cherchée MP.

Si le point donné C tomboit ſur le diamètre AB (*Fig.* 152. *Pl.* 8.); l'on auroit alors $t = o$, & il faudroit effacer par conſéquent tous les termes où t ſe rencontre ; ce qui donneroit $4as - 2aa = 4yy = 4ax$, en mettant pour yy ſa valeur ax. D'où l'on tireroit $x = s - \frac{1}{2}a$; c'eſt-à-dire, que ſi l'on prend CP égale à la moitié du paramètre, & qu'ayant tiré l'appliquée PM perpendiculaire ſur AB, l'on mene la droite CM, elle ſera perpendiculaire ſur la courbe AMD.

COROLLAIRE.

202. Si l'on veut à préſent que le point M (*Fig.* 152. *Pl.* 8.) ſoit donné, & que le point C ſoit celui qu'on cherche ; il faudra dans la derniere équation qui exprime la valeur de AC (s) par rapport à AP (x) ou PM (y), regarder ces dernieres comme connues, & l'autre comme l'inconnue.

DÉFINITION II.

Si d'un rayon quelconque de la développée l'on décrit un cercle, il ſera nommé *cercle baiſant*.

Le point où ce cercle touche ou baiſe la courbe, eſt appellé *point baiſant*.

PROPOSITION V.

PROBLÉME.

203. LA *nature de la courbe* AMD (*Fig.* 153. *Pl.* 8.) *étant donnée avec un de ſes points quelconques* M; *trouver le centre* C *du cercle qui la baiſe en ce point* M.

Ayant mené les perpendiculaires MP, CK ſur l'axe, & nommé les lignes par les mêmes lettres que dans le Problême précédent; l'on arrivera à la même équation dans laquelle il faut obſerver que la lettre x ou y, que l'on y regarde comme l'inconnue, marque ici une grandeur donnée; & qu'au contraire s, t, que l'on y regarde comme connues, ſont en effet ici les inconnues auſſi bien que r.

Cela poſé, il eſt clair 1°. Que le point cherché C ſera ſitué ſur la perpendiculaire MG à la courbe. 2°. Que l'on pourra toujours décrire un cercle qui touchera la courbe en M, & la coupera au moins en deux points (dont je ſuppoſe que le plus proche eſt D, d'où l'on abaiſſera la perpendiculaire DB); puiſque l'on peut toujours trouver un cercle qui coupe une ligne courbe quelconque, autre qu'un cercle, au moins en quatre points, & que le point touchant M n'équivaut qu'à deux interſections. 3°. Que plus ſon centre G approche du point cherché C, plus auſſi le point d'interſection D approche du point touchant M: de ſorte que le point G tombant ſur le point C, le point D ſe réunit

avec le point M; puisque (*Art.* 76.) le cercle décrit du rayon CM, doit toucher & couper la courbe au même point M. D'où l'on voit que s exprimant AF, & t, FG, l'équation doit avoir deux racines égales, sçavoir (*Art.* 200.) chacune à AP ou PM selon qu'on a fait évanouir y ou x, & une autre AB ou BD qui devient aussi égale à AP ou PM, lorsque s & t expriment les cherchées AK, KC; & qu'ainsi cette équation doit avoir trois racines égales.

EXEMPLE.

204. SOIT $ax = yy$ l'équation qui exprime la nature de la courbe AMD, & l'on trouvera (*Art.* 201,) y^4, &c. qui étant multipliée par 8, 3, o, -1, o, produit des deux progressions arithmétiques 4, 3, 2, 1, o, & 2, 1, o, -1, -2 donne $8y^4 = 2aaty$.

$$\begin{array}{cccccc} y^4 & * - 2asyy & + 2aaty & + aass & = o. \\ & + aa & & - aarr & \\ & & & + aatt & \\ 4, & 3, \; 2, & 1, & o. & \\ 2, & 1, \; o, & -1, & -2. & \\ \hline 8y^4 & * \quad * & - 2aaty & * & = o. \end{array}$$

D'où l'on tire la cherchée KC ou PE $(t) = \frac{4y^3}{aa}$.

Si l'on veut avoir une équation qui exprime la nature de la courbe qui passe par tous les points C, l'on multipliera encore y^4, &c. par o, 3, 4, 3, o, produit des deux progressions 4, 3, 2, 1, o, & o, 1, 2, 3, 4; & l'on trouvera $8asy$

$-4aay = 6aat$: d'où, en ſuppoſant pour abréger $s - \frac{1}{2}a = u$, l'on tirera $y = \frac{3at}{4u}$, & $4y^3 = \frac{27a^3t^3}{16u^3} = aat$; & partant $16u^3 = 27att$. D'où il ſuit que la courbe qui paſſe par tous les points C, eſt une ſeconde parabole cubique, dont le paramètre $= \frac{27a}{16}$, & dont le ſommet eſt éloigné de celui de la parabole propoſée de $\frac{1}{2}a$; parce que $u = s - \frac{1}{2}a$.

Lorſque la poſition des parties de la courbe, voiſines du point donné M, eſt entierement ſemblable de part & d'autre de ce point, comme il arrive lorſque la courbure y eſt la plus grande ou la moindre; il s'enſuit que l'une des interſections du cercle touchant ne peut ſe réunir avec le point touchant, que l'autre ne s'y réuniſſe en même temps: de ſorte que l'équation doit avoir alors quatre racines égales. En effet, ſi l'on multiplie y^4, &c. par $24, 6, o, o, o$, produit des trois progreſſions arithmétiques $4, 3, 2, 1, o$, & $3, 2, 1, o, -1$, & $2, 1, o, -1, -2$; l'on aura $24y^4 = o$: ce qui fait voir que le point M doit tomber ſur le ſommet A de la parabole, afin que la poſition des parties voiſines de la courbe ſoit ſemblable de part & d'autre.

Autre Solution.

205. On peut encore (*Fig.* 154. *Pl.* 8.) réſoudre ce Problême en ſe ſouvenant que l'on a démontré dans l'article 76 qu'on ne peut mener du point cherché C qu'une ſeule perpendiculaire

CM à la courbe AMD; au lieu qu'il y a une infinité d'autres points G ſur cette perpendiculaire MC, d'où l'on peut mener deux perpendiculaires MG, GD à la courbe. Si donc on ſuppoſe que le point G ſoit donné, & que l'on cherche (*Art.* 200.) la valeur de x ou y par rapport aux données s & t; il eſt viſible que cette équation doit avoir deux racines inégales, ſçavoir AP, AB ou PM, BD qui deviennent égales entr'elles lorſque le point G tombe ſur le point cherché C. C'eſt pourquoi l'on multipliera cette équation par une progreſſion arithmétique quelconque, &c.

EXEMPLE.

206. SOIT comme ci-deſſus $ax = yy$; & l'on aura (*Art.* 201.) $4y^3$, &c.

$$\begin{array}{cccc} 4y^3 & * & -4asy & +2aat = 0. \\ & & +2aa & \\ 2, & 1, & 0, & -1. \\ \hline 8y^3 & * & * & -2aat = 0. \end{array}$$

qui étant multipliée par la progreſſion arithmétique 2, 1, 0, — 1, donne comme (*Art.* 204.) auparavant $t = \frac{4y^3}{aa}$.

COROLLAIRE.

207. IL eſt évident qu'on peut (*Fig.* 153. 154. *Pl.* 8.) conſidérer le point baiſant comme (*Art.* 203.) la réunion d'un point touchant avec un point d'interſection du même cercle; ou bien comme (*Art.* 205.) la réunion de deux points

touchans de deux cercles différens & concentriques : de même que le point d'infléxion peut être regardé (*Art.* 196.) comme la réunion d'un point touchant avec un point d'intersection de la même droite, ou (*Art.* 198.) comme la réunion de deux points touchans de deux différentes droites qui partent d'un même point.

PROPOSITION VI.

PROBLÉME.

208. TROUVER *une équation qui exprime la nature de la caustique* AFGK, (*Fig.* 155. *Pl.* 8.) *formée dans le quart de cercle* CAMNB, *par les rayons réfléchis* MH, NL, *&c. dont les incidens* PM, QN, *&c. sont paralleles à* CB.

Je remarque, 1°. Que si l'on prolonge les rayons réfléchis MF, NG, qui touchent la caustique en F, G, jusqu'à ce qu'ils rencontrent le rayon CB aux points H, L; l'on aura MH égale à CH, & NL égale à CL. Car l'angle CMH = CMP = MCH; & de même l'angle CNL = CNQ = NCL.

2°. Que d'un point donné F sur la caustique AFK, l'on ne peut mener qu'une seule droite MH qui soit égale à CH; au lieu que d'un point donné D entre le quart de cercle AMB & la caustique AFK, l'on peut mener deux lignes MH, NL telles que MH = CH & NL = CL. Car on ne peut mener du point F qu'une seule tangente MH; au lieu que du point D, on en peut mener deux MH, NL. Ceci bien entendu

Soit proposé de mener d'un point donné D la

droite M H, enſorte qu'elle ſoit égale à la partie CH, qu'elle détermine ſur le rayon CB.

Ayant mené MP, DO paralleles à CB, & MS parallele à C A, ſoient nommées les données C O ou R S, u; OD, z; AC ou CB, a; & les inconnues CP ou MS, x; PM ou CS, y; CH ou MH, r. Le triangle rectangle MSH donnera $rr = rr - 2ry + yy + xx$: d'où l'on tire CH $(r) = \frac{xx + yy}{2y}$. De plus les triangles ſemblables MRD, MSH donneront M R $(x - u)$. MS (x) : : RD $(z - y)$. SH $= \frac{zx - xy}{x - u}$. & partant CS+SH ou CH $= \frac{zx - uy}{x - u} = \frac{xx + yy}{2y} = \frac{aa}{2y}$ en mettant pour $xx + yy$ ſa valeur aa. D'où l'on forme (en multipliant en croix) l'équation $aax - aau = 2zxy - 2uyy$; & mettant pour yy ſa valeur $aa - xx$, il vient $2zxy = aax + aau - 2uxx$: quarrant enſuite chaque membre pour ôter les incommenſurables, & mettant encore pour yy ſa valeur $aa - xx$, l'on aura enfin

$$\begin{array}{llll} 4uux^4 - 4aaux^3 & - 4aauuxx & + 2a^4ux + a^4uu = 0. \\ 4zz & - 4aazz & \\ & + a^4 & \end{array}$$

Or il eſt clair que u exprimant C O; & z, OD; cette égalité doit avoir deux racines inégales, ſçavoir CP, CQ: & qu'au contraire u exprimant CE; & z, EF; CQ devient égale à CP, de ſorte qu'elle a pour lors deux racines égales. C'eſt pourquoi ſi l'on multiplie ſes termes par ceux des deux progreſſions arithmétiques 4, 3, 2, 1, 0, & 0, 1, 2, 3, 4, l'on formera deux égalités nouvelles par le moyen

desquelles on trouvera, après avoir fait évanouir l'inconnue x, cette équation.

$$\begin{array}{llll} 64z^6 & -48aaz^4 & +12a^4zz & -a^6 \quad = o, \\ & +192uu & -96aauu & -15a^4uu \\ & & +192u^4 & -48aau^4 \\ & & & +64u^6 \end{array}$$

qui exprime la rélation de la coupée CE (u) à l'appliquée EF (z). Ce qu'il falloit trouver.

On peut déterminer le point touchant F en se servant de la méthode expliquée dans la huitieme Section. Car si l'on imagine un autre rayon incident pm infiniment proche de PM; il est clair que le réfléchi mh coupera MH au point cherché F, par lequel ayant tiré FE parallele à PM, l'on nommera CE, u; EF, z; CP, x; PM, y; CM, a: & l'on trouvera comme ci-dessus $\frac{aax + aau - 2uxx}{xy} = 2z$. Or il est visible que CM, CE, EF demeurent les mêmes pendant que CP & PM varient. C'est pourquoi l'on prendra la différence de cette équation en traitant a, u, z, comme constantes, & x, y, comme variables; ce qui donnera $2uyxxdx + aauydx - aaxxdy - aauxdy + 2ux^3dy = o$, dans laquelle mettant pour dx sa valeur $-\frac{ydy}{x}$ (que l'on trouve en prenant la différence de $yy = aa - xx$), & ensuite pour yy sa valeur $aa - xx$, il vient enfin CE (u) $= \frac{x^3}{aa}$.

Si l'on suppose que la courbe AMB ne soit plus un quart de cercle, mais une autre courbe quelconque qui ait pour rayon de sa développée au

point M la droite MC ; il eſt clair (*Art.* 76.) que ſa petite portion Mm peut être regardée comme un arc de cercle décrit du centre C. D'où il ſuit que ſi l'on mene par ce centre la perpendiculaire CP ſur le rayon incident PM, & qu'ayant pris CE $= \frac{x^3}{aa}$ (CP $= x$, CM $= a$) l'on tire EF parallele à PM ; elle ira couper le rayon réfléchi MH au point F, où il touche la cauſtique AFK.

Si l'on tire par tous les points M, m d'une ligne courbe quelconque AMB, des lignes droites MC, mC à un point fixe C de ſon axe AC, & d'autres droites MH, mh terminées par la perpendiculaire CB à l'axe, enſorte que l'angle CMH $=$ MCH, & Cmh $=$ mCh ; & qu'il faille trouver ſur chaque MH le point F où elle touche la courbe AFK, formée par les interſections continuelles de ces droites MH, mh. On trouvera comme auparavant CH $= \frac{xx + yy}{2y} = \frac{zx - uy}{x - u}$: d'où l'on tire : $\frac{x^3 + uyy + xyy - uxx}{xy} = 2z$, dont la différence (en traitant u, z comme conſtantes, & x, y comme variables) donne $2x^3ydx - uxxydx - x^4dy + ux^3dy + xxyydy + uxyydy - uy^3dx = o$; & partant la cherchée CE (u) $= \frac{2x^3ydx - x^4dy + xxyydy}{xxydx - x^3dy + y^3dx - xyydy}$. Or la nature de la ligne AMB étant donnée, l'on aura une valeur de dy en dx, laquelle étant ſubſtituée dans l'expreſſion de CE, cette expreſſion ſera délivrée des différences & entiérement connue.

PROPOSITION VII.

PROBLÉME.

209. SOIT *une ligne droite indéfinie* AO (*Fig.* 156. *Pl.* 8.) *qui ait un commencement fixe au point* A; *soit entendue une infinité de paraboles* BFD, CDG *qui ayent pour axe commun la droite* AO, *& pour paramètres les droites* AB, AC *interceptées entre le point fixe* A, *& leurs sommets* B, C. *On demande la nature de la ligne* AFG *qui touche toutes ces paraboles.*

Je remarque d'abord que deux quelconques de ces paraboles BFD, CDG se couperont en un point D situé entre la ligne AFG & l'axe AO; que AC devenant égal à AB, le point d'intersection D tombe sur le point touchant F. Ceci bien entendu,

Soit proposé de mener par le point donné D une parabole qui ait la propriété marquée. Si l'on mene l'appliqueé DO, & qu'on nomme les données AO, u; OD, z; & l'inconnue AB, x; la propriété de la parabole donnera AB × BO ($ux - xx$) = $\overline{DO}^2$ (zz); & ordonnant l'égalité, l'on aura $xx - ux + zz = 0$. Or il est évident que u exprimant AO; & z, OD; cette égalité a deux racines inégales, sçavoir AB, CA: & qu'au contraire u exprimant AE; & z, EF; AC devient égale à AB, c'est-à-dire, qu'elle a pour lors deux racines égales. C'est pourquoi on la multipliera par la progression arithmétique 1, o, -1: ce qui donne $x = z$; & substituant cette valeur à la place de x, il vient l'équation $u = 2z$ qui doit exprimer la nature de la ligne AFG. D'où l'on voit que AFG est une ligne droite faisant avec AO l'angle FAO tel que AE est double de EF.

Si l'on veut résoudre cette question en général, de quelque degré que puissent être les paraboles BFD, CDG; on se servira de la Méthode expliquée dans la Section huitieme, en cette sorte. Nommant AE, u; EF, z; AB, x; l'on aura $\overline{u-x}^m \times x^n = z^{m+n}$ qui exprime en général la nature de la parabole BF, dont la différence donne (en traitant u & z comme constantes, & x comme variable) $-m \times \overline{u-x}^{m-1} dx \times x^n + nx^{n-1} dx \times \overline{u-x}^m = 0$; & divisant par $\overline{u-x}^{m-1} dx \times x^{n-1}$, il vient $-mx + nu - nx = 0$: d'où l'on tire $x = \frac{n}{m+n} u$; & partant $u - x = \frac{m}{m+n} u$. Mettant donc ces valeurs à la place de $u-x$, & de x dans l'équation générale ; & faisant (pour abréger) $\frac{m}{m+n} = p$, $\frac{n}{m+n} = q$, $m+n = r$, l'on aura $z = u\sqrt[r]{p^m q^n}$. D'où l'on l'on voit que la ligne AFG est toujours droite, si composées que puissent être les paraboles, n'y ayant que la raison de AE à EF qui change.

On voit clairement par ce que l'on vient d'expliquer dans cette Section, de quelle maniére l'on doit se servir de la Méthode de Mrs. Descartes *&* Hudde *pour résoudre ces sortes de questions lorsque les Courbes sont Géometriques. Mais l'on voit aussi en même temps qu'elle n'est pas comparable à celle de M.* Leibnits, *que j'ai taché d'expliquer à fond dans ce Traité : puisque cette derniere donne des résolutions générales, où l'autre n'en fournit que de particuliéres ; qu'elle s'étend aux lignes transcendantes, & qu'il n'est point nécessaire d'ôter les incommensurables ; ce qui seroit très souvent impraticable.*

COMMENTAIRE



COMMENTAIRE

Des articles les plus difficiles de l'Analyſe des Infiniment Petits.

La Préface que nous avons miſe à la tête de l'Analyſe des Infiniment Petits, *nous diſpenſe de donner ici une idée générale du Commentaire que nous mettons à la ſuite de cet admirable Traité. Ce Commentaire n'eſt pas diſtingué des Notes ſuivantes.*

NOTE I.

LA demande, ou plutôt la ſuppoſition de l'*article* 2. *pag.* 3. que les Commençans n'accordent qu'avec peine, ne contient rien dans le fond qui ne ſoit bien raiſonnable.

En effet, l'on regarde comme infiniment exactes les opérations des Géométres & des Aſtronomes; ils font cependant tous les jours des omiſſions beaucoup plus conſidérables que celles des Algébriſtes. Lorſqu'un Géométre, *par exemple*, prend la hauteur d'une montagne, fait-il attention à un grain de ſable que le vent enléve de deſſus ſon ſommet? Lorſque les Aſtronomes nous parlent des étoiles fixes, ne négligent-ils pas le diamètre de la Terre dont la valeur eſt d'environ trois mille lieues? Lorſqu'ils calculent les éclipſes de Lune, ne regardent-ils pas la Terre comme ſphérique,

& par conséquent ont-ils égard aux maisons, aux tours, aux montagnes qui se trouvent sur sa surface ? Or tout cela est beaucoup moins à négliger que dx, puisqu'il faut un nombre infini de dx, pour faire x ; donc le calcul différentiel est dans le fond le plus sûr des calculs ; donc la demande de l'*article* 2. ne contient rien que de raisonnable. Toutes ces comparaisons sont tirées du Cours de Mathématique de Wolf, *Tom.* 1. *pag.* 418.

NOTE II.

L'ARTICLE 5. *pag.* 5. a besoin d'un Commentaire dans toutes les formes. On convient que la différence de xy est $ydx + xdy + dxdy$; mais on ajoute qu'on peut sans erreur sensible omettre dans la pratique $dxdy$. L'on a raison ; en voici la démonstration la plus rigoureuse. Pour la mettre à la portée de tout le monde, reprenons les choses d'un peu loin.

1°. Toute grandeur infinie se marque par quelqu'un des caracteres ∞, ∞^2, ∞^3 &c.

2°. Le premier de ces caractéres marque un infini du premier ordre, le second un infini du second ordre, le troisieme un infini du troisieme ordre &c.

3°. Un infini du second ordre est infiniment plus grand qu'un infini du premier ordre, & ainsi d'un infini du troisieme ordre par rapport à un infini du second.

4°. Une quantité infinie ne peut pas être augmentée par l'addition d'aucune quantité finie,

ni diminuée par la soustraction d'aucune quantité finie. Ainsi $\infty + 1 = \infty$; de même $\infty - 4 = \infty$. Ce que l'on a dit de l'infini par rapport au fini, on doit le dire de l'infini d'un ordre supérieur vis-à-vis l'infini d'un ordre inférieur. Ainsi $\infty^2 + \infty = \infty^2$; de même $\infty^3 - \infty^2 = \infty^3$. *Voyez-en la preuve dans la note précédente.*

5°. Toute grandeur infiniment petite est représentée par une fraction dont le numérateur est un fini & le dénominateur un infini. Ainsi $\frac{1}{\infty}$, $\frac{1}{\infty^2}$, $\frac{1}{\infty^3}$ &c. sont des fractions qui représentent des grandeurs infiniment petites du premier, du second & du troisieme ordre. Une grandeur infiniment petite est encore représentée par une fraction dont le numérateur est un infini d'un ordre inférieur à celui du dénominateur. Ainsi $\frac{\infty}{\infty^2}$ représente une grandeur infiniment petite. En effet, $\frac{\infty}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$.

6°. Un infiniment petit du second ordre représente une grandeur infiniment plus petite qu'un infiniment petit du premier ordre, & ainsi des autres à l'infini.

7°. Une quantité infiniment petite n'est rien par rapport à une quantité finie. Ainsi $1 + \frac{1}{\infty} = 1$; $1 - \frac{1}{\infty} = 1$. De même un infiniment petit du second ordre n'est rien vis-à-vis un infiniment

petit du premier ordre. Ainſi $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$; $\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty}$. Vous en trouverez la preuve dans la *note précédente*.

8°. xy eſt le produit de x multipliant y.

9°. $xy + ydx + xdy + dxdy$ eſt le produit de $x + dx$ multipliant $y + dy$, c'eſt-à-dire, eſt le produit de x augmenté d'une quantité infiniment petite, par y qui ſe trouve auſſi augmenté d'une quantité infiniment petite ; donc $ydx + xdy + dxdy$ eſt la différence de xy.

10°. $dxdy$ eſt une quantité infiniment petite du ſecond ordre par rapport à $ydx + xdy$ qu'on doit regarder comme des quantités infiniment petites du premier ordre. En effet, prenons le rectangle ABCD ou xy, *Fig.* 157. *Pl.* 8. Augmentons ſa baſe CD ou y de la quantité infiniment petite D*n* ou dy, & ſa hauteur BD ou x de la hauteur infiniment petite D*p* ou dx ; il eſt évident que le rectangle infiniment petit B*m* D*n* ou xdy, & le rectangle infiniment petit CD *op* ou ydx ſont des rectangles infiniment plus grands que le rectangle D*npr* ou $dxdy$, parce que chacun des deux premiers eſt le produit d'une quantité finie par une quantité infiniment petite, au lieu que le ſecond eſt le produit de deux quantités infinimeut petites ; donc $dxdy$ eſt une quantité infiniment plus petite que ydx ou que xdy ; donc on peut ſans erreur ſenſible la négliger dans la pratique ; donc ſi la différence de xy eſt $ydx + xdy + dxdy$, elle ſera $ydx + xdy$.

11°. Il eſt donc vrai que la différence d'un produit composé de deux quantités contient la différence de la premiere quantité multipliée par la seconde, + la différence de la seconde quantité multipliée par la premiere. Il n'eſt pas moins vrai que la différence d'un produit composé de trois quantités ſe trouve en multipliant le produit des quantités poſées de deux en deux par la différence de la troiſieme. La différence, *par exemple*, de xyz eſt $yzdx + xzdy + xydz$; en voici la démonſtration.

Je fais $xy = u$; donc la différence de u ſera la même que la différence de xy ; donc $ydx + xdy = du$.

De plus $xy = u$, donc $xyz = uz$; donc la différence de xyz ſera la même que la différence de uz ; donc la différence de xyz eſt $zdu + udz$. Mais $zdu = yzdx + xzdy$, parce que $du = ydx + xdy$; & $udz = xydz$, parce que $xy = u$; donc $zdu + udz = yzdx + xzdy + xydz$; donc ſi la différence de xyz eſt $zdu + udz$, elle ſera par-là même $yzdx + xzdy + xydz$; donc la différence d'un produit composé de trois quantités ſe trouve en multipliant le produit des quantités poſées de deux en deux par la différence de la troiſieme. Par là même raiſon l'on aura la différence d'un produit composé de 4 quantités, en multipliant le produit des quantités poſées de trois en trois par la différence de la quatrieme. La différence du produit $uxyz$ eſt donc $xyzdu + uyzdx + uxzdy + uxydz$. En général la différence du produit de pluſieurs quan-

tités multipliées les unes par les autres eſt égale à la ſomme des produits de la différence de chacune de ces quantités par le produit des autres. M. de l'Hôpital avance, *par exemple*, que la différence de $\overline{a+x} \times \overline{b-y}$ eſt $bdx - ady - ydx - xdy$. Il a raiſon. En effet, $\overline{a+x} \times \overline{b-y} = ab + bx - ay - xy$. Mais ab n'ayant point de différence, celle de ce dernier produit eſt évidemment $bdx - ady - ydx - xdy$, donc &c.

NOTE III.

M. le Marquis de l'Hôpital aſſure, à l'*article* 6. *pag*. 6. que $\frac{ydx - xdy}{yy}$ eſt la différence de $\frac{x}{y}$. Pour le démontrer, je fais $\frac{x}{y} = z$; & j'avance que dans cette hipothéſe l'on aura $dz = \frac{ydx - xdy}{yy}$, donc l'on aura par là même $\frac{ydx - xdy}{yy}$ pour la différence de la fraction $\frac{x}{y}$. Le calcul ſuivant en ſera la preuve évidente.

1. $\frac{x}{y} = z$ par hypothéſe.
2. $x = yz$
3. $dx = zdy + ydz$
4. $ydz = dx - zdy$
5. $dz = \frac{dx}{y} - \frac{zdy}{y}$
6. $dz = \frac{dx}{y} - zd$

$$7.\quad dz = \frac{dx}{y} - \frac{xd}{y}$$

$$8.\quad dz = \frac{ydx - xdy}{yy}$$

EXPLICATION.

1°. La premiere équation eſt une pure ſuppoſition, qu'on ne peut accorder, qu'en accordant que la ſeconde équation eſt inconteſtable.

2°. La troiſieme équation eſt fondée ſur ce principe ; ſi $x = yz$, donc la différence de x ſera égale à la différence de yz.

3°. La quatrieme équation a été formée par les régles ordinaires, c'eſt-à-dire, en tranſportant dans l'autre membre de l'équation la quantité $+ zdy$, après l'avoir affectée du ſigne —.

4°. En diviſant par y la quatrieme équation, l'on a eu la cinquieme équation, & en ôtant dans celle-ci les lettres qui ſe détruiſent, l'on a eu la ſixieme équation.

5°. Pour trouver la ſeptieme équation, l'on a ſubſtitué dans le ſecond membre de la ſixieme à z ſa valeur $\frac{x}{y}$.

6°. La huitieme équation eſt la même que la ſeptieme, aux yeux de quiconque ſçait les premiers éléments de l'Algébre ; donc ſi celle-ci eſt bonne, celle-là le ſera auſſi ; donc la différence d'une fraction eſt égale au produit de la différence du numérateur par le dénominateur, — au produit de la différence du dénominateur par le numérateur, le tout diviſé par le quarré du dé-

nominateur ; donc la différence de $\frac{a}{x}$ eſt $\frac{-adx}{xx}$, parce que le numérateur a n'a point de différence ; donc la différence de $\frac{x}{a+x}$ eſt $\frac{adx + xdx - xdx}{aa + 2ax + xx}$ $= \frac{adx}{aa + 2ax + xx}$.

NOTE IV.

L'ARTICLE 7, *page* 7, demande une foule d'éclairciſſements ; ils ſeront renfermés dans les réponſes aux queſtions ſuivantes.

Premiere Queſtion. Comment pourroit-on prouver que -1 eſt l'expoſant de $\frac{1}{x}$?

Réponſe. $x^{-1} = \frac{1}{x}$. En effet $x^{-1} \times x^2 = x^{2-1}$ $= x$; donc x eſt le produit du multiplicande x^2 par le multiplicateur x^{-1} ; donc $\frac{x}{x^2} = x^{-1}$, parce que la diviſion du produit par le multiplicande donne pour quotient le multiplicateur. Mais $\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$; donc $x^{-1} = \frac{1}{x}$; donc en général une quantité élevée à une puiſſance dont l'expoſant eſt un nombre entier négatif, n'eſt autre que l'unité diviſée par la puiſſance poſitive de cette quantité ; donc $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$; donc $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ &c.

Seconde Queſtion. Eſt-il vrai que $\sqrt[2]{x}$ ait pour expoſant $\frac{1}{2}$?

Réponse. Cela eſt vrai, & en voici la preuve. $\sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}$; mais $x^{\frac{1}{2}}$ a pour expoſant $\frac{1}{2}$, donc $\sqrt[2]{x}$ a pour expoſant $\frac{1}{2}$. Il s'agit donc de démontrer que $\sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}$. La choſe n'eſt pas difficile. Voici comment il faut s'y prendre.

$x^{\frac{1}{2}} \times x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = x^1 = x$; donc $x^{\frac{1}{2}}$ eſt la racine quarrée de x. Mais $\sqrt[2]{x}$ eſt la racine quarrée de x; donc $\sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}$; donc en général une quantité quelconque élevée à une puiſſance fractionnaire n'eſt autre choſe que la racine d'une puiſſance dont l'expoſant eſt le numérateur de la fraction, & le dénominateur eſt l'expoſant de la racine; donc $\sqrt[3]{x^1} = x^{\frac{1}{3}}$; donc $\sqrt[5]{x^4} = x^{\frac{4}{5}}$.

Troiſieme Queſtion. A quoi équivaut $\frac{1}{\sqrt[2]{x^3}}$?

Réponſe. $\frac{1}{\sqrt[2]{x^3}} = x^{-\frac{3}{2}}$. Je le démontre. $\sqrt[2]{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$ (*queſtion* 2e.); donc $\frac{1}{\sqrt[2]{x^3}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$. Mais $\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = x^{-\frac{3}{2}}$ (*queſtion* 1re.) donc $\frac{1}{\sqrt[2]{x^3}} = x^{-\frac{3}{2}}$; donc $\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} = x^{-\frac{5}{3}}$; donc $\frac{1}{\sqrt[2]{x^7}} = x^{-\frac{7}{2}}$.

Quatrieme Queſtion. Eſt-il vrai que 1, $\sqrt{x}$, x forment une progreſſion géométrique?

Réponse. Il eſt évident que $1 : \sqrt[2]{x} :: \sqrt[2]{x} : x$; car $1 \times x = x$, & $\sqrt[2]{x} \times \sqrt[2]{x} = x$; donc 1, $\sqrt[2]{x}$, x ſont trois termes en progreſſion géométrique.

Leurs trois expoſants o, $\frac{1}{2}$, 1 forment une progreſſion arithmétique; car $o + 1 = 1$, & $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Corollaire I. 1, $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[3]{xx}$, x ſont en progreſſion géométrique. En effet, $1 : x^{\frac{1}{3}} :: x^{\frac{1}{3}} : x^{\frac{2}{3}}$, car $1 \times x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$, & $x^{\frac{1}{3}} \times x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$. De plus $x^{\frac{1}{3}} : x^{\frac{2}{3}} :: x^{\frac{2}{3}} : x^{1}$, car $x^{\frac{1}{3}} \times x^{1} = x^{1 + \frac{1}{3}} = x^{\frac{4}{3}}$, & $x^{\frac{2}{3}} \times x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{4}{3}}$; donc 1, $x^{\frac{1}{3}}$, $x^{\frac{2}{3}}$, x, ou 1, $\sqrt[3]{x}$ $\sqrt[3]{xx}$, x ſont en progreſſion géométrique.

Pour leurs expoſants o, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1; ils ſont en progreſſion arithmétique. En voici la preuve. $o . \frac{1}{3} : \frac{1}{3} . \frac{2}{3}$, puiſque la ſomme des extrêmes $o + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$, & que la ſomme des moyennes $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. De plus $\frac{1}{3} . \frac{2}{3} : \frac{2}{3} . 1$, puiſque $\frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$, & que $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$; donc les expoſants o, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1 ſont en progreſſion arithmétique.

Corollaire II. Par la même raiſon, 1, $\sqrt[5]{x}$, $\sqrt[5]{xx}$, $\sqrt[5]{x^3}$, $\sqrt[5]{x^4}$, x, ou, 1, $x^{\frac{1}{5}}$, $x^{\frac{2}{5}}$, $x^{\frac{3}{5}}$, $x^{\frac{4}{5}}$, x ſont en progreſſion géométrique; & leurs expoſants o, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, 1 ou $\frac{5}{5}$ ſont en progreſſion arithmétique.

Cinquieme Queſtion. $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{\sqrt[2]{x^3}}$, $\frac{1}{xx}$ ſont-ils en progreſſion géométrique?

Réponse. x^{-1}, $x^{-\frac{3}{2}}$, x^{-2} ſont en progreſſion géométrique ; car $x^{-1} \times x^{-2} = x^{-3}$, & $x^{-\frac{3}{2}} \times x^{-\frac{3}{2}} = x^{-\frac{6}{2}} = x^{-3}$; donc x^{-1}, $x^{-\frac{3}{2}}$, x^{-2} ou $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{\sqrt[2]{x^3}}$, $\frac{1}{xx}$ ſont en progreſſion géométrique.

Il n'eſt pas néceſſaire de faire remarquer que leurs expoſants -1, $-\frac{3}{2}$, -2 ſont en progreſſion arithmétique ; la choſe ſaute aux yeux. Il en eſt de même des autres progreſſions géométriques & arithmétiques que propoſe M. le Marquis de l'Hôpital ; elles ſe préſentent à tout Commençant qui ſçait délivrer une quantité quelconque de ſon ſigne radical, en lui donnant un expoſant fractionnaire.

Sixieme Queſtion. Comment peut-on démontrer que $2xdx$ eſt la différence de xx.

Réponſe. xx eſt le produit de x par x. La différence d'un produit compoſé de deux quantités contient (*Note* 2e.) la différence de la premiere quantité multipliée par la ſeconde, + la différence de la ſeconde quantité multipliée par la premiere ; donc la différence de xx eſt $xdx + xdx = 2xdx$.

L'on prouvera par la même *note* que la différence de x^3 eſt $3x^2dx$; que celle de x^4 eſt $4x^3dx$; & qu'en général la différence d'une puiſſance quelconque parfaite ou imparfaite d'une quantité variable, eſt égale au produit de l'expoſant de cette

puiſſance, par cette même quantité élevée à une puiſſance moindre d'une unité, & multipliée par ſa différence. En nommant donc m un expoſant quelconque entier poſitif, l'on dira que la différence de x^{m} eſt $m x^{m-1} dx$. De même en nommant $\frac{m}{n}$ un expoſant quelconque fractionnaire poſitif, l'on aura $\frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} dx$, ou $\frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} dx$, pour la différence de $x^{\frac{m}{n}}$. Enfin en prenant $-m$ pour un expoſant quelconque entier négatif, & $-\frac{m}{n}$ pour un expoſant quelconque fractionnaire négatif, l'on aura $-mx^{-m-1} dx$ pour la différence de x^{-m}, & $-\frac{m}{n} x^{-\frac{m}{n}-1} dx = -\frac{m}{n} x^{-\frac{m-n}{n}} dx$ pour la différence de $x^{-\frac{m}{n}}$.

Septieme Queſtion. Comment peut-on démontrer que $-mx^{-m-1} dx = \frac{-mx^{m-1}dx}{x^{2m}}$?

Réponſe. Pour démontrer que $-mx^{-m-1} dx = \frac{-mx^{m-1}dx}{x^{2m}}$, multiplions les deux membres de cette équation par x^{2m}, nous aurons $-mx^{-m+2m-1}dx = -mx^{m-1}dx$, ou $-mx^{m-1} dx = -mx^{m-1} dx$; donc, après la multiplication, les deux produits ſe ſont trouvés égaux; donc les deux multiplicandes l'étoient avant la multiplication. Mais les deux multiplicandes étoient les

deux membres de l'équation $-mx^{-m-1}dx$ $= \frac{-mx^{m-1}dx}{x^{2m}}$; donc ces deux membres étoient réellement égaux.

L'on prouvera de la même maniere que $\frac{-\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx}{x^{\frac{2m}{n}}} = -\frac{m}{n}x^{-\frac{m}{n}-1}dx$; donc en général la différence d'une puissance quelconque parfaite ou imparfaite d'une quantité variable est égale au produit de l'exposant de cette puissance, par cette même quantité élevée à une puissance moindre d'une unité, & multipliée par sa différence. Concluez de là qu'il n'est pas nécessaire de faire $x^{\frac{m}{n}} = z$, pour trouver la différence d'une puissance quelconque imparfaite.

Huitieme Question. Quelle est la différence du cube de $ay - xx$?

Réponse. La différence demandée est $3a^3yydy - 6aaxxydy + 3ax^4dy - 6aayyxdx + 12ayx^3dx - 6x^5dx$, parce que le cube de $ay - xx$ est $a^3y^3 - 3aayyx^2 + 3ayx^4 - x^6$. En effet, la différence de a^3y^3 est $3a^3yydy$ (*question* 6.) La différence de $-3aayyxx$ est $-6aaxxydy - 6aayyxdx$ (même question). La différence de $+3ayx^4$ est $+3ax^4dy + 12ayx^3dx$ (même question). Enfin la différence de $-x^6$ est $-6x^5dx$, (même question); donc la différence assignée est la véritable différence du cube de $ay - xx$.

Neuvieme Question. Quelle est la différence du radical $\sqrt{xy + yy}$?

Réponse. La différence demandée est $\frac{ydx + xdy + 2ydy}{2\sqrt{xy + yy}}$. En voici la démonstration. Pour la mettre à la portée de tout le monde, je fais $\sqrt{xy + yy} = u$. Cela supposé, voici comment je raisonne.

1°. $u = \sqrt{xy + yy}$; donc la différence de u sera la même que la différence de $\sqrt{xy + yy}$.

2°. $u = \sqrt{xy + yy}$; donc $uu = xy + yy$; donc la différence de uu sera la même que la différence de $xy + yy$; donc $2udu = ydx + xdy + 2ydy$.

3°. $2udu = ydx + xdy + 2ydy$; donc $du = \frac{ydx + xdy + 2ydy}{2u}$; donc $du = \frac{ydx + xdy + 2ydy}{2\sqrt{xy + yy}}$, parce que $u = \sqrt{xy + yy}$; donc dans l'hypothése proposée la différence de u est $\frac{ydx + xdy + 2ydy}{2\sqrt{xy + yy}}$. Mais dans cette même hypothése la différence de u est la même que la différence de $\sqrt{xy + yy}$; donc la différence de $\sqrt{xy + yy}$ est $\frac{ydx + xdy + 2ydy}{2\sqrt{xy + yy}}$.

Corollaire I. En faisant $\sqrt{a^4 + axyy} = u$, vous trouverez par le même calcul que la différence de ce radical est $\frac{a^4 + ayydx + 2axydy}{2\sqrt{a^4 + axyy}}$.

Corollaire II. En faisant $\sqrt[3]{ax + xx} = u$, l'on trouvera que la différence de ce radical est $\frac{adx + 2xdx}{3\sqrt[3]{ax + xx^2}}$; en voici la preuve la plus détaillée.

1°. $u = \sqrt[3]{ax + xx}$; donc $u = \overline{ax + xx}^{\frac{1}{3}}$ (question 2e.); donc $uu = \overline{ax + xx}^{\frac{2}{3}}$; donc $uu = \sqrt[3]{\overline{ax + xx}^2}$ (même question).

2°. $u = \sqrt[3]{ax + xx}$; donc $uuu = ax + xx$; donc $3uudu = adx + 2xdx$ (question 6e.)

3°. $3uudu = adx + 2xdx$; donc $du = \frac{adx + 2xdx}{3\sqrt[3]{\overline{ax + xx}^2}}$, parce que $uu = \sqrt[3]{\overline{ax + xx}^2}$ (num. 1.); mais la différence du radical $\sqrt[3]{ax + xx}$ est la même que celle de u; donc elle sera $\frac{adx + 2xdx}{3\sqrt[3]{\overline{ax + xx}^2}}$.

Dixieme Question. Quelle est la différence du radical $\sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}$.

Réponse. La différence demandée est $\frac{adx + 2xdx}{2\sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}} + \frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{a^4 + axyy} \times 2\sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}}$. Pour le démontrer, faisons $\sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}} = u$; & voyons ce que vaudra du dans cette hypothése.

1°. $u = \sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}$; donc $uu = ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}$; donc $2udu = adx + 2xdx + \frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{a^4 + axyy}}$; donc du sera égal à $adx + 2xdx$ divisé par $2u$ + à $\frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{a^4 + axyy}}$ divisé par $2u$ ou par $2\sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}$.

2°. $a\,d\,x + 2\,x\,d\,x$ divisé par $2u =$
$$\frac{adx + 2xdx}{2\sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}}.$$

3°. $\frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{a^4 + axyy}}$ divisé par $2u$ est égal, par les régles de la division des fractions à $\frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{a^4 + axyy} \times 2u}$
$$= \frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{a^4 + axyy} \times 2\sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}};$$
donc $du = \frac{adx + 2xdx}{2\sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}} +$
$$\frac{ayydx + 2axydy}{2\sqrt{a^4 + axyy} \times 2\sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}};$$ donc le problême à été résolu.

Corollaire. La différence que M. le Marquis de l'Hôpital assigne à la fraction $\frac{\sqrt[3]{ax + xx}}{\sqrt{xy + yy}}$, ne paroîtra pas embrouillée à ceux qui se rappelleront ce qui suit.

1°. La différence du numérateur $\sqrt[3]{ax + xx}$ est $\frac{adx + 2xdx}{3\sqrt[3]{\overline{ax + xx}^2}}$ (*Cor. II. de la question* 9).

2°. La différence de $\sqrt{xy + yy}$ est $\frac{ydx + xdy + 2ydy}{2\sqrt{xy + yy}}$ (*question* 9).

3°. Le quarré de $\sqrt{xy + yy}$ est $xy + yy$.

4°. La différence d'une fraction quelconque est égale au produit de la différence du numérateur

par

par le dénominateur, — au produit de la différence du dénominateur par le numérateur, le tout divisé par le quarré du dénominateur (*Note* 3); donc la différence de la fraction proposée est égale à la différence du numérateur $\sqrt[3]{ax+xx}$ multipliée par le dénominateur $\sqrt{xy+yy}$, — à la différence du dénominateur $\sqrt{xy+yy}$ multipliée par le numérateur $\sqrt[3]{ax+xx}$; le tout divisé par $xy+yy$, quarré du dénominateur $\sqrt{xy+yy}$; donc la fraction proposée n'a pas d'autre différence que celle que lui a assignée M. le Marquis de l'Hôpital à la fin de l'article 7. pag. 12.

NOTE V.

DANS toute la Section seconde M. le Marquis de l'Hôpital se sert du calcul différentiel pour trouver les tangentes de toutes sortes de lignes courbes. Il suppose que le Lecteur a étudié avec attention tout ce qui regarde les sections coniques; nous le supposons aussi. Malgré cela cependant nous allons lui rappeller en peu de mots les principales propriétés du Cercle, de la Parabole, de l'Ellipse & de l'Hyperbole. Cette espéce d'abrégé du Traité des sections coniques est absolument nécessaire pour rendre intelligible la plupart des problêmes & des exemples que contient cette seconde section.

1°. Si l'on coupe le cone ABC, *Fig.* 158. *Pl.* 8, parallélement à sa base circulaire AIKC,

& plus haut ou plus bas à volonté ; l'on aura un cercle LTH, d'autant plus grand ou d'autant plus petit, que la ſection ſera faite plus près ou plus loin de la baſe du cone. La propriété de cette courbe eſt que le quarré d'une ordonnée quelconque DF, *Fig.* 159. *Pl.* 8, eſt toujours égal au produit des coupées ou abſciſſes correſpondantes AF, FB. Nommons donc DFy, AB$2a$, AFx ; l'on aura AC ou CBa, FB $= 2a - x$; & l'équation ſera $DF^2 = AF \times FB$, ou $yy = 2ax - xx$; c'eſt là l'équation au cercle, en prenant le ſommet A pour l'origine des x ou des abſciſſes. Si l'on prenoit le centre C pour l'origine des abſciſſes, c'eſt-à-dire, ſi l'on faiſoit CF $= x$; l'on auroit AF $= a - x$, FB $= a + x$; & l'équation précédente ſe changeroit en celle-ci, $yy = aa - xx$.

2°. Si l'on coupe le cone ABC, *Fig.* 158. *Pl.* 8, obliquement à ſa baſe & parallélement à un de ſes côtés AB ; l'on aura la parabole IGK. Une parabole quelconque MSm, *Fig.* 160. *Pl.* 8, a pour ſommet le point S ; pour foyer, le point F ; pour grand axe, SP ; pour ordonnées au grand axe, les lignes PM, FN, pR ; pour coupées ou abſciſſes correſpondantes, les lignes SP, SF, Sp ; pour paramètre, une ligne quelconque égale à la double ordonnée Nn qui paſſe par le foyer F. La propriété de cette courbe, c'eſt que le quarré d'une ordonnée eſt égal au produit de l'abſciſſe correſpondante & du paramètre ; ainſi $PM^2 = SP \times Nn$. Nommons donc y une ordonnée quel-

conque ; nommons x ſon abſciſſe correſpondante, & p le paramètre ; l'on aura pour équation à la parabole $yy = px$.

3°. L'on a dans la parabole MSm l'équation $PM^2 = PS \times Nn$; l'on a encore dans la même parabole $pR^2 = pS \times Nn$; donc l'on aura $PM^2 : pR^2 :: PS \times Nn : pS \times Nn$; mais le paramètre nN eſt une quantité conſtante ; donc l'on aura $PM^2 : pR^2 :: PS : pS$; donc dans une parabole quelconque les quarrés des ordonnées ſont entr'eux comme leurs abſciſſes.

4°. L'on a dans la parabole $yy = px$; donc ſi $p = 1$, l'équation deviendra $yy = 1x = x$.

5°. L'on a dans la parabole $yy = px$; donc x croiſſant, y doit croitre auſſi, parce que p eſt une quantité invariable. Mais les x peuvent croitre à l'infini, parce que le grand axe de la parabole peut être prolongé à l'infini ; donc les y peuvent croitre à l'infini ; donc la parabole ira toujours en augmentant, & ne ſe fermera jamais.

6°. Si l'on coupe le cone ABC, *Fig.* 158. *Pl.* 8, obliquement à ſa baſe & à ſes deux côtés, de maniere que la ſection coupe les deux côtés du cone ; l'on aura une ellipſe DMN. Une ellipſe quelconque, *par exemple*, l'ellipſe ABED, *Fig.* 161. *Pl.* 8, a pour grand axe, AB ; pour petit axe, ED ; pour foyer, F, f ; pour centre de figure, C ; pour ordonnée, PM, pm ; pour abſciſſes correſpondantes à l'ordonnée PM, les lignes AP, PB ; pour abſciſſes correſpondantes à pm, les lignes Ap, pB ; pour paramètre du grand axe, la double

ordonnée Nn qui passe par le foyer F. Dans cette espéce de courbe, l'on a toujours la proportion suivante, le quarré d'une ordonnée quelconque est au produit de ses abscisses correspondantes, comme le paramètre est au grand axe, ou $PM^2 : AP \times PB :: Nn : AB$. Nommons donc AB, $2a$; ED, $2b$; Nn, p; PM, y; AP, x; l'on aura $PB = 2a - x$, & la proportion précédente se changera en celle-ci, $yy : 2ax - xx :: p : 2a$; donc $2ayy = 2apx - pxx$; donc $yy = \frac{2apx - pxx}{2a}$; donc $yy = px - \frac{pxx}{2a}$; & c'est-là l'équation au paramètre de l'ellipse, en prenant l'un des sommets A pour l'origine des abscisses.

7°. Si l'on avoit pris l'origine des abscisses au centre C, *c'est-à-dire*, si l'on avoit $CP = x$, l'on auroit eu $AP = a - x$, & $PB = a + x$. La proportion précédente se seroit donc changée en celle-ci; $yy : aa - xx :: p : 2a$; donc $2ayy = aap - pxx$: donc $yy = \frac{aap - pxx}{2a}$; donc $yy = \frac{1}{2} ap - \frac{pxx}{2a}$; & c'est-là l'équation au paramètre de l'ellipse, en prenant les abscisses depuis le centre C.

8°. $2ayy = aap - pxx$; donc $\frac{2ayy}{p} = aa - xx$; donc x augmentant, le second membre $aa - xx$ doit diminuer. Le second membre ne peut pas diminuer, sans que le premier membre $\frac{2ayy}{p}$ diminue. Mais dans ce premier membre, il n'y a que y

qui puiſſe diminuer, parce que le grand axe $2a$ & le paramètre p ſont des quantités conſtantes; donc dans l'ellipſe x augmentant, y doit diminuer. Mais x ne peut augmenter que juſqu'à un certain point, parce que le grand axe de cette courbe eſt déterminé; donc l'ellipſe ſe fermera dans les deux points où les x ne ſeront plus ſuſceptibles d'augmentation; donc elle ſe fermera aux deux ſommets A & B.

9°. L'on a dans l'ellipſe $PM^2 : AP \times PB :: Nn : AB$; l'on a encore $pm^2 : Ap \times pB :: Nn : AB$ (*num.* 6); donc l'on aura $PM^2 : AP \times PB :: pm^2 : Ap \times pB$; donc $PM^2 : pm^2 :: AP \times PB : Ap \times pB$; donc dans l'ellipſe les quarrés des ordonnées ſont entr'eux comme les produits des abſciſſes correſpondantes.

10°. Il eſt encore démontré dans tous les Traités des Sections coniques, que dans toute ellipſe le quarré d'une ordonnée quelconque eſt au produit des abſciſſes correſpondantes, comme le quarré du demi-petit axe eſt au quarré du demi-grand axe; donc l'on aura, en prenant l'origine des abſciſſes à l'un des ſommets, la proportion ſuivante; $yy : 2ax - xx :: bb : aa$; donc $aayy = 2abbx - bbxx$; donc $yy = \frac{2abbx - bbxx}{aa}$; donc $yy = \frac{2bbx}{a} - \frac{bbxx}{aa}$; & c'eſt-là l'équation aux axes de l'ellipſe, en prenant l'origine des abſciſſes à l'un des ſommets.

11°. Dans toute ellipſe le quarré d'une ordonnée quelconque eſt au produit des abſciſſes correſ-

pondantes, comme le quarré du demi-petit axe eſt au quarré du demi-grand axe ; donc, en prenant l'origine des abſciſſes au centre C, l'on aura $yy : aa - xx :: bb : aa$; donc $aayy = aabb - bbxx$; donc $yy = \frac{aabb - bbxx}{aa}$; donc $yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$; & c'eſt-là l'équation aux axes de l'ellipſe, en prenant le centre de la courbe pour l'origine des abſciſſes.

12°. Il eſt enfin démontré dans tous les Traités des Sections coniques que dans une ellipſe quelconque le grand axe eſt au petit axe, comme le petit axe eſt au paramètre.

13°. Si l'on coupe le cone ABC, (*Fig.* 158. *Pl.* 8), obliquement à ſa baſe, & aux deux côtés du cone, de maniere que la Section prolongée en haut, aille couper un des côtés AB, auſſi prolongé ; l'on aura l'hyperbole FHE, dont le grand axe ſera HR, à l'extrêmité duquel on pourra former une ſeconde hyperbole égale à celle dont nous venons de parler, afin d'avoir deux hyperboles oppoſées ſur un même axe HR. L'hyperbole *n* AM, (*Fig.* 162. *Pl.* 8), a pour axe principal, AB ; pour petit axe, DE ; pour foyers, F, *f*, pour centre commun aux deux hyperboles oppoſées, le point C ; pour ordonnée, PM, à laquelle correſpondent les abſciſſes AP, BP ; pour paramètre du grand axe, la double ordonnée N*n* qui paſſe par le foyer F. Faiſons donc $AB = 2a$, AC ou CB $= a$, $DE = 2b$, DC ou $CE = b$, $Nn = p$, $PM = y$, $AP = x$, l'on aura $BP = 2a + x$. Dans

cette eſpéce de courbe l'on a toujours la proportion ſuivante, le quarré d'une ordonnée quelconque eſt au produit des abſciſſes correſpondantes, comme le paramètre eſt à l'axe principal ; donc $PM^2 : AP \times BP :: Nn : AB$; donc $yy : 2ax + xx :: p : 2a$; donc $2ayy = 2apx + pxx$; donc $yy = \frac{2apx + pxx}{2a}$; donc $yy = px + \frac{pxx}{2a}$; & c'eſt-là l'équation au paramètre de l'hyperbole, en comptant les abſciſſes depuis le ſommet.

14°. A quelques ſignes près, l'équation eſt la même pour l'ellipſe & pour l'hyperbole. En effet, l'équation commune à ces deux courbes eſt $yy = px \mp \frac{pxx}{2a}$. Dans les doubles ſignes le ſupérieur eſt pour l'ellipſe, & l'inférieur pour l'hyperbole.

15°. En comptant les abſciſſes depuis le centre C, c'eſt-à-dire, en nommant CP, x; l'on aura $AP = x - a$, & $BP = x + a$. Dans cette hypothéſe le produit des abſciſſes correſpondantes ſera $xx - aa$; & la proportion de *num.* 13. ſe changera en celle-ci, $yy : xx - aa :: p : 2a$; donc $2ayy = pxx - aap$: donc $\frac{2ayy}{p} = xx - aa$; & c'eſt-là l'équation au paramètre de l'hyperbole, en comptant les abſciſſes depuis le centre C.

16°. A cauſe des quantités conſtantes $2a$ & p, les quarrés des ordonnées PM, pm ſont entr'eux comme les produits de leurs abſciſſes correſpondantes. Le calcul eſt le même que celui que nous avons fait pour l'ellipſe, *num.* 9.

17°. L'hyperbole va toujours en s'élargiſſant, & elle ne doit jamais ſe fermer. En effet, dans l'équation $\frac{2ayy}{p} = xx - aa$, x augmentant, y doit auſſi augmenter, parce que les quantités repréſentées par a & par p ſont des quantités invariables. Mais x peut augmenter à l'infini, parce qu'on peut prolonger AP à l'infini; donc y peut augmenter à l'infini; donc les ordonnées à l'hyperbole repréſentées par y, vont toujours en augmentant à meſure qu'elles s'éloignent du ſommet A; donc l'hyperbole va toujours en s'élargiſſant; donc elle ne doit jamais ſe fermer.

18°. Dans l'hyperbole équilatere $2a = p$; donc l'équation générale $\frac{2ayy}{p} = xx - aa$ ſe réduit pour l'hyperbole équilatére à $yy = xx - aa$; ce qui donne $x - a : y :: y : x + a$; donc dans cette eſpéce de courbe l'ordonnée eſt moyenne proportionnelle entre les abſciſſes correſpondantes.

19°. Dans l'hyperbole comme dans l'ellipſe, $2a : 2b :: 2b : p$, c'eſt-à-dire, le paramètre eſt une troiſieme proportionnelle au grand & au petit axe.

20°. Les lignes Qq, Gg, (*Fig.* 162. *Pl.* 8.) qui ſe coupent au centre C, & dont la premiere eſt paralléle à la ligne AE, & la ſeconde à la ligne AD, ſont les aſſymptotes des deux hyperboles opposées nAM, mMB. Il eſt démontré dans tous les Traités des Sections coniques que le rectangle ſous l'ordonnée hn & l'abſciſſe Ch eſt égal au quarré de AH. Faiſons donc $hn = y$, $Ch = x$, & $AH = a$;

nous aurons $xy = aa$, & c'eſt-là l'équation de l'hyperbole rapportée à ſes aſſymptotes.

21°. Tout ce que nous avons dit juſqu'à préſent doit s'entendre des Sections coniques ordinaires, c'eſt-à-dire, des Sections coniques tirées d'un cone qui a pour baſe un cercle ordinaire. L'on trouvera *num.* I. ce qu'il faut entendre par cercle ordinaire.

22°. Les Sections coniques d'un genre ſupérieur ſont tirées d'un cone qui a pour baſe un cercle d'un genre ſupérieur, c'eſt-à-dire, une courbe dont les ordonnées & les abſciſſes fourniſſent une équation d'un plus haut degré que celle que donnent les ordonnées & les abſciſſes d'un cercle ordinaire.

23°. Suppoſons que le cone ABC, (*Fig.* 158. *Pl.* 8), ait pour baſe une courbe dans laquelle le cube de PQ ſoit égal au produit du quarré de A Q multiplié par QC; ce cone donnera les Sections ſuivantes.

La parabole qui en ſera tirée, aura pour équation $y^3 = p^1x^2$.

L'ellipſe tirée de ce même cone aura pour équation $y^3 = px^2 - \frac{px^3}{2a}$, ou $2ay^3 = 2apx^2 - px^3$; ce qui ſe réduit à la proportion ſuivante, $y^3 : x^2 \times (2a - x^1) :: p : 2a$.

L'équation à l'hyperbole tirée de ce même cone ſera $y^3 = px^2 + \frac{px^3}{2a}$, ou $2ay^3 = 2apx^2 + px^3$; ce qui donne la proportion ſuivante, $y^3 : x^2 \times (2a + x^1) :: p : 2a$.

24°. L'équation à la parabole cubique étant $y^3 = p^1x^2$, elle ſera ſera par là même $y^{1+2} = p^1x^2$, & elle ſera en général pour toute parabole d'un genre ſupérieur $y^{m+n} = p^m x^n$. De même l'équation du *num.* 23. ſe changera, pour l'ellipſe & pour l'hyperbole, en l'équation générale $y^{m+n} = px^n \mp \frac{px^{m+n}}{2a}$.

25°. Il faut donc que dans l'équation générale appliquable aux ellipſes & aux hyperboles d'un genre ſupérieur, l'expoſant de y ſoit égal à la ſomme des expoſants des deux abſciſſes correſpondantes à l'ordonnée y. Il faut encore que dans l'équation générale appliquable à une parabole quelconque d'un genre ſupérieur, l'expoſant de y ſoit égal à la ſomme des expoſants de l'abſciſſe correſpondante & du paramètre. Auſſi l'équation $y^3 = p^2x^1$ eſt-elle autant l'équation à une parabole cubique que $y^3 = p^1x^2$; parce que l'une & l'autre donnent l'équation générale $y^{m+n} = p^m x^n$.

26°. Tout ce que nous avons avancé dans cette *Note*, eſt dévelopé & démontré dans tout Traité des Sections coniques. On peut conſulter celui que nous avons donné dans la troiſiéme édition de notre petit Dictionnaire de Phyſique en 2 volumes *in*-8°, imprimé à Avignon chez la Veuve GIRARD en l'année 1767. On peut encore conſulter le Traité des Sections coniques de l'Abbé de la Caille, & le Commentaire que nous avons donné de ce Traité dans notre *Guide des jeunes Mathématiciens*, imprimé à Avignon chez la même Veuve GIRARD en l'année 1765.

NOTE VI.

LES deux queſtions ſuivantes jetteront un grand jour ſur l'*article* 9, *page* 14.

Premiere Queſtion. Comment peut-on démontrer que les triangles *m*RM, MPT, (*Fig.* 3. *Pl.* 1.) ſont ſemblables ?

Réponſe. Les deux triangles *m*RM, MPT ont d'abord un angle droit chacun, l'un en R, l'autre en P. Ils ont enſuite l'angle T égal à l'angle M, parce que le côté infiniment petit M*m* étant confondu avec la ligne MT prolongée, & cette ligne coupant les deux paralleles TP, MR; il eſt impoſſible que l'angle extérieur M ne ſoit pas égal à l'angle intérieur T; donc les deux triangles *m*RM, MPT ſont équiangles; donc ils ſont ſemblables; donc ils ont leurs côtés homologues proportionnels.

Seconde Queſtion. Comment la connoiſſance de la ſoutangente PT, (*Fig.* 3. *Pl.* 1.), peut-elle conduire à la connoiſſance de la tangente MT.

Réponſe. En connoiſſant la longueur de la ſoutangente PT, l'on a le point T auquel doit aboutir la tangente demandée. Le point M d'où cette tangente doit partir, eſt donné de poſition; donc en connoiſſant la longueur de la ſoutangente PT, l'on a les deux points extrêmes de la tangente MT; donc la connoiſſance de la ſoutangente PT conduit néceſſairement à la connoiſſance de la tangente MT, parce que d'un point quelconque à un point quelconque on peut toujours tirer une ligne droite. Pour trouver donc facilement une tangen-

te quelconque M T, il ne s'agit que de ſçavoir manier la formule générale $\frac{ydx}{dy} = \text{PT}$, en différenciant l'équation de la courbe à laquelle on veut tirer une tangente.

NOTE VII.

L'on apprend dans l'*article* 11, *pag.* 15. à tirer des tangentes à des paraboles & à des hyperboles de tous les genres. Il s'agit d'abord de tirer une tangente à une courbe dont l'équation eſt $ax = yy$. Cette courbe eſt évidemment (*Note* 5. *num.* 2.) une parabole ordinaire dont y eſt une ordonnée quelconque, x l'abſciſſe correſpondante, & a le paramètre. En différentiant l'équation $ax = yy$, l'on trouve tout de ſuite que dans cette courbe $dx = \frac{2ydy}{a}$. La ſoutangente P T eſt dans toutes les courbes égale à $\frac{ydx}{dy}$. Mais dans la parabole ordinaire $dx = \frac{2ydy}{a}$; donc dans la parabole ordinaire l'on aura $\text{PT} = \frac{2yydy}{ady} = \frac{2yy}{a}$. Dans cette même parabole l'on a $yy = ax$; donc $\frac{2yy}{a} = \frac{2ax}{a} = 2x$; donc dans la parabole ordinaire la ſoutangente $\text{PT} = 2x = 2\text{AP}$, (*Fig.* 3. *Pl.* 1); c'eſt-là le *num.* 1. de l'*article* 11.

Le *num.* 2. du même *article* apprend à tirer une tangente à une courbe dont l'équation eſt $aa = xy$. C'eſt-là (*Note* 5, *num.* 20.) l'équation de l'hy-

perbole ordinaire rapportée à ſes aſſymptotes. Cette équation différentiée devient, à cauſe de la conſtante a, $ydx + xdy = o$; donc $ydx = - xdy$; donc $dx = - \frac{xdy}{y}$. La ſoutangente PT eſt dans toutes les courbes égale à $\frac{ydx}{dy}$; donc l'on aura dans l'hyperbole ordinaire $PT = - \frac{xydy}{ydy} = - x$; donc en prenant PT = PA, (*Fig.* 4. *Pl.* 1), & en plaçant PT du côté oppoſé au point A, l'on aura la longueur de la ſoutangente à laquelle répond la tangente MT. Il n'eſt pas néceſſaire de faire remarquer que le point A eſt le point d'interſection des deux aſſymptotes de l'hyperbole repréſentée par la figure 4 de la planche 1. Il eſt encore moins néceſſaire de faire remarquer que les Géométres ſont convenus de déſigner les poſitions oppoſées des lignes par les ſignes + & —. Si $PT = + x$, lorſque le point T eſt au deſſus du point A, c'eſt-à-dire, au deſſus du point de l'origine des x; l'on aura $PT = - x$, lorſque le point T ſera au deſſous du point A. Ce ſont là des connoiſſances que l'on doit ſuppoſer dans tout homme qui entreprend de lire un Traité auſſi difficile que celui des *Infiniment Petits*.

Le *num.* 3 de l'*article* 11. demande un long Commentaire. Pour le rendre plus clair, nous allons le renfermer dans les réponſes aux queſtions ſuivantes.

Premiere Queſtion. De quelle eſpéce de parabole parle-t-on au *num.* 3 de l'*article* 11.

Réponſe. M. le Marquis de l'Hôpital parle, au *num*. 3. de l'*article* 11, des paraboles d'un genre ſupérieur, puiſqu'il a parlé des paraboles ordinaires, au *num*. 1 du même article.

Seconde Queſtion. Pourquoi, dans l'équation générale $y^m = x$, M. le Marquis de l'Hôpital ne fait-il pas mention du paramètre de la courbe?

Réponſe. Parce qu'il ſuppoſe ce paramètre $= 1$. Or $1x = x$: & comme toutes les puiſſances de 1 donnent 1; ſi $p = 1$, l'on aura $px = x$, $p^2x = x$, $p^3x = x$ &c.

Troiſieme Queſtion. Comment l'équation générale $y^m = x$ peut-elle convenir aux paraboles d'un genre ſupérieur, puiſque nous avons aſſuré (*num*. 24 & 25 de la *Note* 5.) que ces courbes avoient pour équation générale $y^{m+n} = p^m x^n$, ou $y^{m+n} = p^n x^m$.

Réponſe. 1°. Nous verrons dans la réponſe à la queſtion 5e., que lorſque l'expoſant m eſt un nombre fractionnaire poſitif plus grand que l'unité, l'équation $y^m = x$ équivaut à l'équation générale $y^{m+n} = p^m x^n$.

2°. L'équation $y^m = x$ équivaudra à l'équation $y^{m+n} = p^n x^m$, ſi l'on ſuppoſe que l'expoſant m que donne à y M. Le Marquis de l'Hôpital, eſt égal à l'expoſant de x qui eſt 1, + à l'expoſant du paramètre qui multiplie x. En effet, ſuppoſons $m = 3$; l'équation $y^m = x$ deviendra $y^3 = 1^2 x^1$, c'eſt-à-dire, le cube d'une ordonnée quelconque eſt égal au produit de l'abſciſſe correſpondante par le quarré du paramètre égal

à l'unité ; ce qui eſt en effet l'équation à une eſpéce de paraboles cubiques.

Quatrieme Queſtion. La valeur générale de la ſoutangente PT étant $\frac{ydx}{dy}$, comment peut-il ſe faire que PT devienne $= mx$ dans les courbes dont l'équation eſt $y^m = x$.

Réponſe. Le calcul ſuivant va ſervir de ſolution à cette queſtion. $y^m = x$, donc la différence de y^m ſera égale à la différence de x, donc $my^{m-1}\,dy = dx$; donc en faiſant entrer la nouvelle valeur de dx dans la formule générale $\frac{ydx}{dy}$, l'on aura $PT = \frac{y \times my^{m-1}\,dy}{dy} = my^m$. Mais $y^m = x$, *par hypothéſe*, donc $my^m = mx$; donc $PT = mx$.

Cinquieme Queſtion. Comment l'équation $y^{\frac{3}{2}} = x$, peut-elle devenir $y^3 = axx$?

Réponſe. Elle le devient par le calcul ſuivant. $y^{\frac{3}{2}} = x$, donc $\sqrt[2]{y^3} = x$ (*Note* 4e. *queſtion* 2.) donc $y^3 = xx$; donc $y^3 = 1xx$; donc, en faiſant le paramètre $1 = a$, l'on aura $y^3 = axx$; donc $y^{1+2} = a^1\,x^2$; donc $y^{m+n} = a^m\,x^n$.

L'on trouvera par la même méthode que $y^{\frac{4}{3}} = x$, devient $y^4 = axxx$. En effet, $y^{\frac{4}{3}} = x$, donc $\sqrt[3]{y^4} = x$, donc $y^4 = xxx$; donc $y^4 = 1xxx$, donc $y^4 = axxx$, donc $y^{1+3} = a^1\,x^3$, donc $y^{m+n} = a^m\,x^n$, donc nous avons eu raiſon d'aſ-

ſurer dans la réponſe à la troiſieme queſtion, que lorſque l'expoſant *m* eſt un nombre fractionnaire poſitif plus grand que l'unité, l'équation $y^{m} = x$ équivaut à l'équation générale $y^{m+n} = p^{m} x^{n}$.

Sixieme Queſtion. Comment peut-on prouver que $y^{-2} = x$ donne l'équation $a^3 = xyy$, laquelle équation convient à l'hyperbole cubique rapportée à ſes aſſymptotes?

Réponſe. 1°. Il faut ſe rappeller que $aa = xy$ eſt l'équation à l'hyperbole ordinaire rapportée à ſes aſſymptotes (*Note* 5e. *num.* 20.)

2°. $y^{-2} = x$, donc $\frac{1}{y^2} = x$ (*Note* 4e. *queſtion* 1.) donc $1 = xyy$; mais dans le cas préſent $1 = a^3$, puiſqu'on ne peut pas avoir $aa = xy$, ſans avoir $a^3 = xyy$, donc $y^{-2} = x$ équivaut à $xyy = a^3$.

Septieme Queſtion. D'où eſt tirée la proportion $dx : dy :: my^{m-1} : 1$?

Réponſe. Cette proportion eſt tirée de l'équation $my^{m-1}dy = dx$. En effet, vous aurez cette équation, en multipliant d'un côté les extrêmes, de l'autre les moyennes de la proportion donnée.

Huitieme Queſtion. Pourquoi, en ſuppoſant $y = o$, la raiſon de dy à dx eſt-elle infiniment grande, lorſque *m* ſurpaſſe 1?

Réponſe. Lorſque *m* ſurpaſſe 1, l'expoſant $m - 1$ eſt un expoſant poſitif. Si $y = o$, & que $m - 1$ ſoit un expoſant poſitif, le terme my^{m-1} devient *o*; donc la proportion $dx : dy :: my^{m-1} : 1$ devient $dx : dy :: o : 1$, ou $dy : dx :: 1 : o$.

Mais

Mais 1 eſt infiniment plus grand que o ; donc dy eſt infiniment plus grand que dx ; donc, en ſuppoſant $y = o$, la raiſon de dy à dx eſt infiniment grande, lorſque m ſurpaſſe 1.

Neuvieme Queſtion. Pourquoi, en ſuppoſant $y = o$, la raiſon de dy à dx eſt-elle infiniment petite, lorſque m eſt moindre que 1 ?

Réponſe. Lorſque m eſt moindre que 1, l'expoſant $m - 1$ eſt un expoſant négatif. Suppoſons $m = \frac{1}{2}$, l'expoſant $m - 1$ ſera $-\frac{1}{2}$, & le terme my^{m-1} ſe changera en $\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}}}$ (*Note* 4e. *queſt.* 1.) Suppoſons maintenant $y = o$, le terme $\frac{1}{\frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}}}$ ſera $\frac{1}{o}$; donc en ſuppoſant $y = o$, & m moindre que 1, le terme my^{m-1} deviendra $\frac{1}{o}$, & la proportion $dx : dy :: my^{m-1} : 1$ ſe changera en celle-ci $dx : dy :: \frac{1}{o} : 1$, ou $dy : dx :: 1 : \frac{1}{o}$. Mais 1 eſt infiniment plus petit que $\frac{1}{o}$, parce que o eſt contenu une infinité de fois dans 1 ; donc, en ſuppoſant $y = o$, la raiſon de dy à dx eſt infiniment petite, lorſque m eſt moindre que 1.

NOTE VIII.

LA formule générale $PT = \frac{ydx}{dy}$ s'applique dans l'*article* 12, *pag.* 17, à des ellipſes de tous les genres. La premiere ellipſe à laquelle on l'applique, eſt une ellipſe ordinaire (*Note* 5. *num.* 6), puiſqu'on ſuppoſe que la courbe AMB, (*Fig.* 5.

Pl. 1), eſt telle que le rectangle ſous les abſciſſes AP, PB eſt au quarré de l'ordonnée PM, comme le grand axe AB eſt au paramètre AD; ce qui donne l'équation $\frac{ayy}{b} = ax - xx$, en faiſant le grand axe AB $= a$, & le paramètre AD $= b$. Cette équation différentiée devient $\frac{2aydy}{b} = adx - 2xdx$; donc $dx = \frac{2aydy}{ab - 2bx}$. Mettons cette nouvelle valeur de dx dans la formule générale PT $= \frac{ydx}{dy}$, l'on trouvera PT $= \frac{2ayydy}{\overline{ab - 2bx} \times dy} = \frac{2ayy}{ab - 2bx}$. Mais l'équation de l'ellipſe AMB donne $\frac{ayy}{b} = ax - xx$; donc $\frac{2ayy}{ab - 2bx} = \frac{2ax - 2xx}{a - 2x}$; donc PT $= \frac{2ax - 2xx}{a - 2x}$. Mais AT $=$ PT $-$ AP $=$ $\frac{2ax - 2xx}{a - 2x} - x = \frac{2ax - 2xx - ax + 2xx}{a - 2x} = \frac{ax}{a - 2x}$; donc AT $= \frac{AB \times AP}{AB - 2AP}$.

L'on apprend enſuite dans le même *article* 12 à tirer une tangente à une ellipſe d'un genre ſupérieur. L'ellipſe qu'on ſuppoſe eſt telle, que le cube de AP $\times$ le quarré de PB eſt à la cinquieme puiſſance de PM, comme le diamètre AB eſt au paramètre AD; ce qui donne l'équation $\frac{ay^5}{b} = x^3 \times \overline{a - x}^2$, ou $\frac{ay^5}{b} = x^3 \times \overline{aa - 2ax + xx}$,

ou enfin $\frac{ay^5}{b} = aax^3 - 2ax^4 + x^5$. Cette équation différentiée devient $\frac{5ay^4dy}{b} = 3aaxxdx - 8ax^3dx + 5x^4dx$; donc $dx = \frac{5ay^4dy}{3aabx^2 - 8abx^3 + 5bx^4}$. Faisons entrer la nouvelle valeur de dx dans la formule générale PT $= \frac{ydx}{dy}$; nous aurons $\frac{5ay^5dy}{(3aabx^2 - 8abx^3 + 5bx^4) \times dy} = \frac{5ay^5}{3aabx^2 - 8abx^3 + 5bx^4}$ = PT. Mais $\frac{ay^5}{b} = aax^3 - 2ax^4 + x^5$; donc en ſubſtituant cette nouvelle valeur, l'on aura PT $= \frac{5aax^3 - 10ax^4 + 5x^5}{3aax^2 - 8ax^3 + 5x^4}$; & en diviſant le numérateur & le dénominateur de cette derniere fraction par $axx - x^3$, l'on aura pour quotient PT $= \frac{5ax - 5xx}{3a - 5x}$. Mais AT=PT−AP $= \frac{5ax - 5xx}{3a - 5x} - x = \frac{5ax - 5xx - 3ax + 5xx}{3a - 5x} = \frac{2ax}{3a - 5x}$; donc dans l'ellipſe dont il s'agit, l'on aura AT $= \frac{2AB \times AP}{3AB - 5AP}$.

L'on pourroit demander ici de prouver que le numérateur $5aax^3 - 10ax^4 + 5x^5$ diviſé par $axx - x^3$ donne pour quotient $5ax - 5xx$. La preuve ſe préſente d'elle-même. Multipliez le diviſeur $axx - x^3$ par $5ax - 5xx$, vous aurez pour produit le dividende $5aax^3 - 10ax^4 + 5x^5$; donc le numérateur $5aax^3 - 10ax^4 + 5x^5$ diviſé par $axx - x^3$ donne pour quotient $5ax - 5xx$.

L'on prouvera de la même maniere que le dénominateur $3aax^2 - 8ax^3 + 5x^4$ divisé par $axx - x^3$ donne pour quotient $3a - 5x$.

M. le Marquis de l'Hôpital termine l'*article* 12 par une formule générale appliquable à toutes les ellipses d'un genre supérieur. Cette formule générale est (*Note* 5, *num.* 23, 24, 25). $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times \overline{a-x}^n$. Tout ce qui peut arrêter un Commençant dans le calcul de cette formule, est éclairci dans les questions suivantes.

Premiere Question. Quelle est la division qui a donné le quotient $\frac{\overline{m+nx} \times \overline{a-x}}{ma - x - nx}$ tiré de la fraction

$$\frac{\overline{m+nx}^m \times \overline{a-x}^n}{mx^{m-1} \times \overline{a-x}^n - \overline{na-x}^{n-1} \times x^m}.$$

Réponse. 1°. Le numérateur de la fraction d'où ce quotient est tiré, est $\overline{m+nx}^m \times \overline{a-x}^n$. La quantité $\overline{m+nx}^m$ a été divisée par x^{m-1}. En effet $\overline{m+nx}^m$ divisé par x^{m-1} donne $\overline{m+nx}^{m-m+1} = \overline{m+nx}^1 = \overline{m+nx}$. Pour la quantité $\overline{a-x}^n$, elle a été divisée par $\overline{a-x}^{n-1}$, puisque $\overline{a-x}^n$ divisé par $\overline{a-x}^{n-1} = \overline{a-x}^{n-n+1} = \overline{a-x}^1 = a-x$.

2°. Le dénominateur de la fraction qui a donné le quotient dont on parle, est $mx^{m-1} \times \overline{a-x}^n - \overline{na-x}^{n-1} \times x^m$. Ce dénominateur est comme composé de deux parties; la premiere est $mx^{m-1} \times \overline{a-x}^n$. La premiere quantité de cette premiere partie, c'est-à-dire, mx^{m-1} a été divisée par x^{m-1},

ce qui a donné m pour quotient. La seconde quantité de cette même partie a été divisée par $\overline{a-x}^{n-1}$; ce qui a donné pour quotient, comme ci-dessus, $a-x$. Aussi le quotient total de cette premiere partie est-il $m \times \overline{a-x} = m\overline{a-x}$.

La seconde partie du dénominateur en question est $-\overline{na-x}^{n-1} \times x^m$. L'on a divisé $-\overline{na-x}^{n-1}$ par $\overline{a-x}^{n-1}$, & l'on a eu pour quotient $-n$. L'on a ensuite divisé x^m par x^{m-1}, & l'on a eu, comme ci-dessus, pour quotient $x^1 = x$. Aussi le quotient total de cette seconde partie est-il $-n \times x = -nx$.

3°. Si PT $= \frac{\overline{m+nx} \times \overline{a-x}}{m\overline{a-x} - nx}$; l'on aura évidemment PT $= \frac{\overline{m+n} \times \overline{ax-xx}}{ma - mx - nx} = \frac{\overline{m+n} \times \overline{ax-xx}}{ma - \overline{m-nx}}$.

Seconde Question. Comment a-t-on trouvé AT $= \frac{nax}{ma - \overline{m-nx}}$?

Réponse. AT $=$ PT $-$ AP $= \frac{\overline{m+n} \times \overline{ax-xx}}{ma - \overline{m-nx}} - x = \frac{\overline{m+n}\,ax - \overline{m-n}\,xx}{ma - \overline{m-nx}} - x$

$= \frac{\overline{m+n}\,ax - \overline{m-n}\,xx - max + \overline{m+n}\,xx}{ma - \overline{m-nx}}$

$= \frac{nax}{ma - \overline{m-nx}}$; à cause des quantités qui se détruisent dans le numérateur.

Corollaire. Toutes les opérations que nous venons de faire dans cette *Note* 8 prouvent qu'il est

plus facile de manier une équation qui a des chiffres pour *expoſants*, que d'en manier une dont les expoſants ſont des lettres.

NOTE IX.

L'ARTICLE 13, *pag.* 18 eſt pour l'hyperbole, ce que l'*article précédent* a été pour l'ellipſe. Voici quelques remarques qui ſerviront à l'éclaircir.

1°. La lecture de la *Note* 5e, convaincra tout homme qui eſt au fait des Sections coniques, que l'équation $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times \overline{a+x}^n$ eſt une équation générale à toute hyperbole dont on fait le grand axe AB, (*Fig.* 6. *Pl.* 1), $= a$, & le paramètre $= b$. Cette équation maniée comme celle de l'ellipſe dont elle ne differe que par les ſignes, ſert à trouver les tangentes finies de l'hyperbole.

2°. L'aſymptote eſt la tangente infinie de l'hyperbole, c'eſt-à-dire, la tangente d'une hyperbole qu'on ſuppoſe s'être élargie à l'infini. La ligne CE, *par exemple*, ne peut être regardée comme tangente de l'hyperbole AM, (*Fig.* 6. *Pl.* 1), qu'autant qu'on ſuppoſera infinies l'abſciſſe AP $= x$, & l'ordonnée PM $= y$. Dans cette hypothéſe l'équation $\frac{nax}{ma + \overline{m+n}x}$ devient d'abord $\frac{nax}{\overline{m+n}x}$, parce que ma eſt infiniment petit vis-à-vis $\overline{m+n}x$ (*Note* 2, *num.* 4). Mais $\frac{nax}{\overline{m+n}x} = \frac{n}{m+n}a$; donc dans cette hypothéſe AT devient $\frac{n}{m+n}a$.

Mais en considérant CE comme tangente, AT devient AC; donc en considérant CE comme tangente, l'on aura $AC = \frac{n}{m+n} a$.

3°. Par la même raison l'équation générale $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times \overline{a+x}^n$ deviendra, à cause du terme infiniment petit a vis-à-vis le terme infiniment grand x, $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m \times x^n$, ou $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^{m+n}$ ou enfin $ay^{m+n} = bx^{m+n}$.

4°. Si l'on fait $m+n=p$, l'on aura $ay^p = bx^p$.

5°. Si l'on extrait la racine p des deux membres de cette derniere équation, l'on aura $\sqrt[p]{ay^p} = \sqrt[p]{bx^p}$ ou $y\sqrt[p]{a} = x\sqrt[p]{b}$; donc $dy\sqrt[p]{a} = dx\sqrt[p]{b}$, parce que les constantes $\sqrt[p]{a}$ & $\sqrt[p]{b}$ n'ont point de différence; donc $dx : dy :: \sqrt[p]{a} : \sqrt[p]{b}$.

6°. En supposant la ligne CE prolongée à l'infini, on concevra au point où l'asymptote CE rencontrera l'hyperbole AM, un triangle infiniment petit qui sera semblable au triangle CAE, c'est-à-dire, qui sera vis-à-vis le triangle CAE, ce que le triangle infiniment petit MRm, (*Fig.* 3. *Pl.* 1), est vis-à-vis le triangle TPM. L'on pourra donc dire du triangle infiniment petit idéal MRm & du triangle fini CAE, que ces deux triangles ont leurs côtés homologues proportionnels; donc MR : mR :: CA : AE; donc $dx : dy$ :: CA : AE. Mais (*num.* 5) $dx : dy :: \sqrt[p]{a} : \sqrt[p]{b}$;

donc $\sqrt[p]{a} : \sqrt[p]{b} : : CA : AE$. Mais (*num.* 2) CA $= \frac{n}{m+n} a = \frac{n}{p} a$; donc $\sqrt[p]{a} : \sqrt[p]{b} : : \frac{n}{p} a : AE$;

donc $AE = \frac{\frac{n}{p} a \times \sqrt[p]{b}}{\sqrt[p]{a}}$; donc $AE = \frac{\frac{n}{p} \sqrt[p]{ba^p}}{\sqrt[p]{a}}$;

donc $AE = \frac{n}{p} \sqrt[p]{ba^{p-1}}$; donc connoissant CA, il sera très facile de trouver AE, & de tirer par les points C & E l'asymptote CE.

7°. Dans l'hyperbole ordinaire où $m = 1$ & $n = 1$, la formule $AC = \frac{n}{m+n} a = \frac{n}{p} a$ devient $AC = \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} AB$, c'est-à-dire, l'asymptote doit partir du centre du grand axe AB.

8°. Dans l'hyperbole ordinaire, la formule AE $= \frac{n}{p} \sqrt[p]{ba^{p-1}} = \frac{n}{m+n} \sqrt[m+n]{ba^{m+n-1}}$ devient $AE = \frac{1}{2} \sqrt[2]{ba^{1+1-1}} = \frac{1}{2} \sqrt{ba}$.

9°. Dans l'hyperbole dont il s'agit ici, l'on a fait le grand axe $= a$ & le paramètre $= b$; donc le petit axe sera $= \sqrt{ab}$, parce que dans l'hyperbole le grand axe : au petit axe : : le petit axe : au paramètre (*Note* 5. *num.* 19); donc en faisant le petit axe $= c$, l'on aura $a : c : : c : b$; donc $cc = ab$; donc $c = \sqrt{ab}$; donc si $AE = \frac{1}{2} \sqrt{ab}$, il faudra que la ligne AE par l'extrémité de laquelle passera l'asymptote CE, soit égale à la moitié du petit axe de l'hyperbole donnée.

NOTE X.

L'ON ſuppoſe dans l'*article* 14, *pag.* 19 une courbe quelconque AM, (*Fig.* 6. *Pl.* 1.) dont l'équation ſoit $y^3 - x^3 = axy$; l'on apprend dans cet article à tirer à cette courbe des tangentes finies & infinies, les réponſes aux queſtions ſuivantes le mettront à la portée de tout le monde.

Premiere Queſtion. Comment a-t-on trouvé $\frac{ydx}{dy} = \frac{3y^3 - axy}{3xx + ay}$.

Réponſe. La différence de l'équation donnée étant $3yydy - 3xxdx = axdy + aydx$, l'on aura $3yydy - axdy = 3xxdx + aydx$; donc $dx = \frac{3yydy - axdy}{3xx + ay}$. Mettons cette nouvelle valeur de dx dans l'équation $PT = \frac{ydx}{dy}$, nous aurons $PT = \frac{3y^3dy - axydy}{3xx + ay \times dy} = \frac{3y^3 - axy}{3xx + ay}$.

Seconde Queſtion. Comment a-t-on trouvé $AT = \frac{axy}{3xx + ay}$?

Réponſe. $AT = PT - AP = \frac{3y^3 - axy}{3xx + ay} - x = \frac{3y^3 - axy - 3xxx - axy}{3xx + ay} = \frac{3y^3 - 3x^3 - 2axy}{3xx + ay}$. Mais $3y^3 - 3x^3 = 3axy$, puiſque *par hypothéſe* $y^3 - x^3 = axy$; donc l'on aura $\frac{3y^3 - 3x^3 - 2axy}{3xx + ay} = \frac{3axy - 2axy}{3xx + ay} = \frac{axy}{3xx + ay} = AT$. Voilà pour les tangentes finies.

Troisieme Question. En faisant $t = \frac{axy}{3xx + ay}$, comment a-t-on trouvé $y = \frac{3tx}{a}$?

Réponse. Le calcul suivant le fera toucher au doigt. $t = \frac{axy}{3xx + ay}$; donc $3txx + aty = axy$; donc $3txx = axy - aty$; donc $y = \frac{3txx}{ax - at}$. Mais en supposant x infini, l'on a $ax - at = ax$ (*Note* 2, *num.* 4) ; donc dans cette hypothése l'on aura $y = \frac{3txx}{ax} = \frac{3tx}{a}$.

Quatrieme Question. Comment a-t-on trouvé $AC = t = \frac{1}{3}a$?

Réponse. On l'a trouvé par le calcul suivant. Par hypothése l'on a $y^3 - x^3 = axy$. Mais $y = \frac{3tx}{a}$, donc l'on aura $\frac{27t^3x^3}{a^3} - x^3 = \frac{3atxx}{a}$; donc $\frac{27t^3x^3 - a^3x^3}{a^3} = 3txx$; donc $27t^3x^3 - a^3x^3 = 3a^3txx$; donc $27t^3x^3 - 3a^3txx = a^3x^3$. Mais à cause de l'infini du troisieme ordre x^3, l'on aura $27t^3x^3 - 3a^3txx = 27t^3x^3$ (*Note* 2. *num.* 4.) ; donc $27t^3x^3 = a^3x^3$; donc $3tx = ax$, parce que les deux racines cubiques de deux cubes égaux sont égales ; donc $3t = a$; donc $t = \frac{a}{3} = \frac{1}{3}a$; donc le point d'où doit partir l'asymptote CE est trouvé, puisque AC doit être le tiers de la ligne donnée a.

Cinquieme Question. Comment a-t-on trouvé AS $= y - \frac{xdy}{dx}$?

Réponse. Au point où l'asymptote CE, (*Fig.* 6. *Pl.* 1), touchera la courbe. Imaginez, comme dans la *Note précédente*, *num.* 6, un triangle infiniment petit MR*m* dont les deux côtés *dx* & *dy* seront en proportion avec les deux côtés AT & AS du triangle TAS. Mais AT $= \frac{ydx}{dy} - x = \frac{ydx - xdy}{dy}$; donc l'on pourra dire $dx : dy :: \frac{ydx - xdy}{dy} :$ AS; donc AS $\times dx = \frac{\overline{ydx - xdy} \times dy}{dy}$; donc AS $\times dx = ydx - xdy$; donc AS $= \frac{ydx - xdy}{dx} = y - \frac{xdy}{dx}$.

Sixieme Question. Comment a-t-on trouvé AS $= s = \frac{axy}{3yy - ax}$?

Réponse. 1°. L'on a trouvé (*quest.* 1. *de cette note*) $3yydy - axdy = 3xxdx + aydx$; donc $dy = \frac{3xxdx + aydx}{3yy - ax}$.

2°. AS $= y - \frac{xdy}{dx}$ (*question précédente*) donc AS $= y - \frac{x}{dx} \times dy = y - \frac{x}{dx} \times \frac{3xxdx + aydx}{3yy - ax} = y - \frac{3x^3dx - axydx}{\overline{3yy - ax} \times dx} = y - \frac{3x^3 - axy}{3yy - ax}$

$= \frac{3y^3 - axy - 3x^3 - axy}{3yy - ax} = \frac{3y^3 - 3x^3 - 2axy}{3yy - ax}$.

3°. *Par hypothéſe*, $y^3 - x^3 = axy$; donc $3y^3 - 3x^3 = 3axy$; donc ſi AS $= \frac{3y^3 - 3x^3 - 2axy}{3yy - ax}$, l'on aura AS $= \frac{3axy - 2axy}{3yy - ax} = \frac{axy}{3yy - ax}$; donc en faiſant AS $= s$, l'on aura $s = \frac{axy}{3yy - ax}$.

Septieme Queſtion. Comment a-t-on trouvé $s = \frac{1}{3} a$?

Réponſe. 1°. $s = \frac{axy}{3yy - ax}$; donc $3syy - asx = axy$; donc $axy + asx = 3syy$; donc $x = \frac{3syy}{ay + as}$.

2°. En ſuppoſant y infini, l'on aura $ay + as = ay$ (*Note* 2. *num.* 4.) donc $x = \frac{3syy}{ay} = \frac{3sy}{a}$.

3°. L'équation à la courbe en queſtion eſt $y^3 - x^3 = axy$? donc elle ſera $y^3 - \frac{27s^3y^3}{a^3} = 3syy$; donc $a^3y^3 - 27s^3y^3 = 3a^3syy$; donc $a^3y^3 = 27s^3y^3 + 3a^3syy$. Mais à côté de l'infini du troiſieme ordre y^3, le terme $3a^3syy$ devient nul (*Note* 2. *num.* 4) ; donc l'on aura $27s^3y^3 = a^3y^3$; donc l'on aura par l'extraction de la racine cubique, $3sy = ay$; donc $3s = \frac{ay}{y}$; donc $3s = a$; donc $s = \frac{a}{3}$; donc $s = \frac{1}{3} a$; donc lorſque AS devient AE, l'on aura AE $= \frac{1}{3} a$; donc en prenant les lignes AC, AE égales chacune au tiers de la ligne donnée a, & en menant par les points C & E la ligne indéfinie CE, l'on aura l'aſymptote de la courbe AM.

Remarque. C'eſt ainſi qu'il faut lire les autres propoſitions de ce Livre, ſi l'on veut en ſaiſir toute la beauté & toute l'utilité. Dans les Notes ſuivantes nous nous occuperons moins à faire des calculs, qu'à donner une idée nette de certaines courbes dont M. le Marquis de l'Hôpital ſuppoſe que ſon Lecteur a une connoiſſance parfaite. Ces courbes ſont la cycloide, la ſpirale, la conchoide, la ciſſoide, la logarithmique, &c, &c. Par là nous rendrons un véritable ſervice aux Commençans qui ne ſcauroient trop s'exercer à trouver, ſans le ſecours d'autrui, la marche que notre incomparable Auteur a ſuivie, pour arriver à telle ou telle équation.

NOTE XI.

AVANT que de lire l'*article* 15, *pag.* 21, il eſt néceſſaire de ſe former une idée nette de la *Cycloide* que l'on appelle quelquefois *Roulete*, & quelquefois *Trochoide*. C'eſt une courbe produite par une entiere révolution d'un globe ou d'un cercle ſur une ligne droite. Imaginez-vous donc un cercle qui roule ſur une ligne droite, *par exemple*, ſur une ligne horizontale. Lorſque tous les points de ſa circonférence ſe ſeront exactement appliqué ſur cette ligne, il aura décrit une courbe à laquelle on a donné le nom de *Cycloide*. Le P. Merſenne s'eſt apperçu le premier que le clou de l'une des roues d'une charéte décrivoit dans l'air une *Cycloide*, parce qu'il étoit animé de deux mouvements ſimultanés, l'un en avant en ligne droite,

l'autre circulaire autour de l'essieu de la roue. Cette découverte fut faite en 1615. La *Figure* 7 de la *Planche* 1 représente une demi-cycloide. Sa demi-circonférence CMA a été produite par la révolution de la demi-circonférence circulaire APB sur la ligne CB. Cette ligne CB, nécessairement égale à la demi-circonférence APB, s'appelle la *base* de la demi-cycloide CMA. Elle a pour *axe* le diamètre AB du cercle *générateur*, c'est-à-dire, du cercle par la révolution duquel elle a été produite ; pour *sommet*, le point A ; & pour *tangente* au point M, la ligne MT parallele à la corde AP. Il est démontré que le contour de la cycloide est quadruple du diamètre de son cercle générateur ; l'on a donc la courbe CMA double du diamétre AB. Il est encore démontré que si d'un point quelconque M de la cycloide CMA, on mene une ligne quelconque MPQ parallele à la base CB, & qui coupe en un point quelconque P le cercle générateur APB décrit sur l'axe AB, il est démontré, dis-je, que l'arc de cercle AP qui dans cette occasion prend le nom de *coupée*, est égal à la droite MP que l'on regarde comme l'*appliquée* correspondante de la *coupée* dont nous venons de parler. Il est enfin démontré que la corde AP de la *coupée* AP est parallele à la ligne MT tangente au point M de la cycloide CMA, & que cette même ligne MT a pour soutangente la ligne PT tangente du cercle au point P. Toutes ces vérités sont démontrées dans tous

les Traités complets de Méchanique, & nommément dans celui de M. l'Abbé de la Caille, *pag.* 180. *art.* 515 *& ſuiv.* Rien donc n'eſt plus facile que de trouver l'équation à la cycloide. Nommons pour cela x la coupée AP, y l'appliquée MP, b la baſe CB, & a la demi-circonférence APB; nous aurons $x:y::a:b$, parce que $x=y$, & $a=b$; donc $bx=ay$; donc $x=\frac{ay}{b}$; & c'eſt là l'équation à la cycloide ſimple, dont il eſt queſtion dans cette ſeconde propoſition; & en général dans toute cycloide la circonférence du cercle générateur eſt à la baſe, comme la coupée eſt à l'appliquée.

NOTE XII.

QUOIQU'IL ne s'agiſſe dans les *articles* 17 & 18, *pag.* 22 que de la cycloide ſimple, il eſt bon cependant de ſçavoir ce qu'il faut entendre par *cycloide allongée*, & par *cycloide accourcie*. Dans la premiere la baſe eſt plus longue, & dans la ſeconde elle eſt plus courte que la circonférence du cercle générateur. Voyez-en la formation phyſique dans l'endroit de la Méchanique de M. l'Abbé de la Caille que nous avons indiqué dans la Note précédente. Ce qu'il faut remarquer ici avec attention, c'eſt que dans la cycloide ſimple l'on a néceſſairement MP $=$ PT, (*Fig.* 7, *Pl.* 1), parce que MP $=y$, & que PT $=\frac{ay}{b}$ devient $=y$ dans cette courbe, à cauſe de $a=b$. M. le Mar-

quis de l'Hôpital a donc raiſon de dire (*art.* 18) que dans la cycloide ſimple le triangle MPT eſt iſoſcéle. Il a encore raiſon de dire que l'angle APQ, eſt meſuré par la moitié de l'arc AP, parce que ſi le cercle APB étoit fini, l'angle APQ inſiſteroit ſur un arc de cercle égal à l'arc AP.

NOTE XIII.

L'ARTICLE 21, *page* 25 préſente deux difficultés. L'on dit 1°. que puiſque PT eſt $\frac{sydx}{xdy}$, il ſera $\frac{\overline{mst + nsty}^{m+n}}{mtz^n x^m - nsz^n x^m}$. Cette valeur ne coutera preſque rien à trouver, ſi l'on prend garde que l'équation $\overline{m+n}y^{m+n-1}dy = \frac{mtz^n x^{m-1}dx - nsz^n x^{m-1}dx}{t}$ donne naturellement $dx = \frac{\overline{mt + nt}y^{m+n-1}dy}{mtz^n x^{m-1} - nsz^n x^{m-1}}$.

L'on fera entrer cette valeur de dx dans $\frac{sydx}{xdy}$, & l'on trouvera à l'inſtant ce que l'on cherche.

La ſeconde difficulté que préſente l'*article* 21 eſt beaucoup plus conſidérable. M. le Marquis de l'Hôpital y avance que ſi les courbes AQC, BCN, (*Fig.* 8, *Pl.* 1), devenoient des lignes droites, la courbe MC, ſeroit alors une des Sections coniques à l'infini. M. Varignon a rendu cette remarque ſenſible par les Figures 163 & 164 de la Pl. 8. ſur leſquelles il faut continuellement avoir les yeux. Soit, *dit-il*, un triangle quelconque rectiligne ECF, dont C ſoit le ſommet, EF la baſe,

& CE, FC les deux côtés, lesquels représentent les deux courbes AQC, BCN dont ils étoient auparavant les tangentes. Des points N d'un des côtés CF, pris & prolongé à discrétion, soient autant de NP paralléles à CD, lesquelles rencontrent la base EF en P, & l'autre côté en Q. Soit pris ensuite sur ces NP un point M, tel que l'on ait partout $\overline{PQ}^m : \overline{PM}^m :: \overline{PM}^n : \overline{PN}^n$, je dis que la courbe MMC sera une des sections coniques à l'infini. Il n'est pas nécessaire de faire remarquer que *m* & *n* représentent des exposants quelconques.

Dém. A cause des paralléles PN, CD, l'on aura $PQ : CD :: EP : ED$, & $PN : CD :: PF : DF$; donc $\overline{PQ}^m : \overline{CD}^m :: \overline{EP}^m : \overline{ED}^m$, & $\overline{PN}^n : \overline{CD}^n :: \overline{PF}^n : \overline{DF}^n$; donc, en multipliant par ordre, l'on aura $\overline{PQ}^m \times \overline{PN}^n : \overline{CD}^{m+n} :: \overline{EP}^m \times \overline{PF}^n : \overline{ED}^m \times \overline{DF}^n$. Mais, *par hypothése*, $\overline{PQ}^m : \overline{PM}^m :: \overline{PM}^n : \overline{PN}^n$; donc $\overline{PQ}^m \times \overline{PN}^n = \overline{PM}^{m+n}$; donc la cinquieme des proportions précédentes se changera en celle-ci, $\overline{PM}^{m+n} : \overline{CD}^{m+n} :: \overline{EP}^m \times \overline{PF}^n : \overline{ED}^m \times \overline{DF}^n$.

Supposons maintenant $m = 1$, & $n = 1$, l'on aura $PM^2 : CD^2 :: EP \times PF : ED \times DF$, c'est-à-dire, le quarré de l'ordonnée PM : au quarré de l'ordonnée CD : : le rectangle sous les abscisses qui correspondent à l'ordonnée PM : au rec-

tangle qui correſpondent à l'ordonnée CD; ce qui eſt le lieu à l'ellipſe & à l'hyperbole ordinaires (*Note* 5, *num.* 9 & 16); donc $\overline{PM}^{m+n} : \overline{CD}^{m+n} :: \overline{EP}^{m} \times \overline{PF}^{n} : \overline{ED}^{m} \times \overline{DF}^{n}$ eſt le lieu à l'ellipſe & à l'hyperbole de quelque genre qu'elles ſoient; donc ſi les courbes AQC, BCN, *Fig.* 8. *Pl.* 1. deviennent des lignes droites, la courbe MC ſera alors une des ſections coniques à l'infini, ſçavoir une ellipſe, lorſque l'appliquée CD, qui part du point de rencontre C, tombe entre les extrêmités A, B, & une hyperbole, lorſqu'elle tombe de part ou d'autre.

Enfin, M. le Marquis de l'Hôpital aſſure que ſi les courbes AQC, BCN deviennent des lignes droites, & que l'une des deux, *par exemple*, AQC ſoit paralléle au diamètre AB, la courbe MC ſera une parabole, parce que dans cette courbe les diamètres ſont paralléles à l'axe, & que la courbe AQC transformée en ligne droite, deviendra diamètre de la courbe MC qui aura AB pour axe.

NOTE XIV.

LA Propoſition 5, *pag.* 26 ſuppoſe la connoiſſance de la ſpirale d'Archiméde dont voici la conſtruction & l'équation. Diviſez la circonférence ABCD, *Fig.* 165. *Pl.* 8, en un certain nombre de parties égales, *par exemple*, en 4. Faites-en de même pour ſon rayon *a*A. Imaginez-vous enſuite que le rayon *a*A parcourt en 4 inſtants égaux la

circonférence ABCD, tandis que dans le même tems le centre *a* monte de *a* en A. Il eſt évident que par ce double mouvement ce centre décrira la premiere ſpirale *a*, *b*, *c*, *d*, A. La ſeconde A*ghi*F ſera décrite de la même maniere. Le centre *a* devra monter juſqu'au point F, tandis que le rayon *a*F parcoura la circonférence FGHI.

Pour avoir l'équation à la premiere ſpirale, nommons *b* la circonférence ABCD, *a* ſon rayon *a*A, & ſuppoſons que le rayon *a*A parcoure l'arc AC, tandis que le centre *a* parcourt *a*N = *ac*. Dans cette ſuppoſition nous aurons l'arc AC pour abſciſſe, & *ac* pour ſon appliquée correſpondante. Si l'on appelle cette abſciſſe *x*, & ſon appliquée correſpondante *y*; l'on dira la circonférence ABCD parcourue en 4 inſtants égaux : au rayon *a*A parcouru dans ce même tems : : l'abſciſſe AC parcourue, *par exemple*, en 2 inſtants : à l'appliquée *a*N = *ac* parcourue auſſi dans 2 inſtants, c'eſt-à-dire, $b : a :: x : y$, donc $by = ax$, donc $y = \frac{ax}{b}$, & c'eſt là l'équation à la ſpirale d'Archimède. Deſcartes prétend dans le livre 2 de ſa Géométrie que cette courbe n'eſt que mécanique. Voyez la diſcuſſion de ce point de Mathématique dans la vie littéraire de ce grand Homme, *pag.* 301 & *ſuivantes*; elle forme le premier volume de notre *Traité de paix entre Deſcartes & Nevvton*, 3 *vol. in*-12 imprimé à Avignon chez la Veuve GIRARD en l'année 1763.

NOTE XV.

LA Propoſition 6, *pag.* 28 ſuppoſe la connoiſſance de la conchoide de Nicoméde ; auſſi allons nous en faire la deſcription, & aſſigner enſuite l'équation de cette courbe. Imaginez-vous donc les lignes droites indéfinies AP, CBc, *Fig.* 166. *Pl.* 8, qui ſe coupent à angles droits au point B. Sur la premiere vous déterminerez AB & BP ; & après avoir pris le point P pour point fixe, vous ferez tourner autour de cette eſpéce de pole la ligne BA, de telle ſorte qu'elle paſſe toujours ſur la *directrice* CBc. Dans toutes les poſitions que AP aura vis-à-vis CBc, vous couperez au deſſus & au deſſous de CBc les lignes CD, Cd, cD, cd égales à BA. La courbe qui joindra les points D, D ſera la conchoide ſupérieure ; & celle qui joindra les points d, d ſera la conchoide inférieure. Si l'on nomme BA, a ; PD, y ; PC, x ; l'on aura néceſſairement PD — PC = DC, donc PD - PC = BA, donc $y - x = a$; & c'eſt-là l'équation à la conchoide de Nicoméde.

NOTE XVI.

L'ARTICLE 26, *page* 30 peut abſolument ſe paſſer de commentaire. Si cependant l'on ſe trouvoit arrêté ſur la fin de cet article, l'on pourroit conſulter, non pas le livre 3, mais la ſection 4 de la partie 1 du livre 2 de la Géométrie de Deſcartes commentée par le P. Rabuel Jéſuite, & im-

primée en un vol. *in*-4°. en 1730 à Lyon chez Duplain. Au reste la Paraboloide dont parle M. le Marquis de l'Hôpital, n'est pas le solide que les Géométres appellent *conoide paraboloide*, c'est une ligne courbe du troisieme degré formée par l'intersection continuelle d'une ligne droite & d'une parabole ordinaire. *Voyez Descartes & son Commentateur à l'endroit cité.*

NOTE XVII.

POUR comprendre sans peine la proposition 8, *pag.* 31, il faut se former auparavant une idée de la cissoide de Dioclés représentée par la figure 14 de la planche 1. En voici la formation. L'on me donne le demi-cercle BAF avec la tangente infinie B*b*. Du point F, je tire jusqu'à la tangente B*b* prolongée à volonté, les lignes F*b*, FA que je continue mentalement jusqu'en V, FR que je continue mentalement jusqu'en *r* &c. Parmi les lignes tirées du point F à la tangente B*b*, je fais ensorte qu'il y en ait une, comme FA, qui passe par le milieu A de la demi-circonférence BAF. Sur la ligne F*b*, je prens FM = *b*N. Sur la ligne FA prolongée mentalement jusqu'en V, je prens FA = AV. Sur la ligne FR prolongée mentalement jusqu'en *r*, je prens F*t* = R*r*; la courbe qui passera par les points F, M, A, *t* sera la cissoide de Dioclés. Dans cette courbe l'on a FM = *b*N, & par conséquent F*b* = FN + FM. L'on a encore FP = P*b*, & par conséquent F*b* = 2FP. Mais

Fb = FN + FM, donc FN + FM = 2FP. Nommons donc avec M. de l'Hôpital FMy, FNz, FPx, l'on aura $y + z = 2x$; & c'eſt-là l'équation à la ciſſoïde.

NOTE XVIII.

LA connoiſſance de la quadratrice de Dinoſtrate eſt néceſſaire pour l'intelligence parfaite de la Propoſition 9e. *pag.* 34. Pour en ſaiſir facilement la formation, imaginez-vous que tandis que le rayon AF, *Fig.* 17. *Pl.* 1, parcourt par un mouvement uniforme le quart de cercle AB, la tangente AH va parallélement à elle-même le long du même rayon AF, de telle ſorte que lorſque le rayon AF ſe trouve avoir parcouru le quart, la moitié, les trois quarts de la circonférence AB, la tangente AH a parcouru le quart, la moitié, les trois quarts du rayon AF; la courbe AMG qui paſſera par tous les points d'interſections du rayon AF & de la tangente AH, s'appelle *quadratrice*. Dinoſtrate ſon inventeur s'en ſervit pour trouver la quadrature approchée du cercle. Pour avoir l'équation à cette courbe, nommons b le quart de cercle AB, a le rayon AF, y une partie quelconque de la circonférence AB parcourue par le rayon AF, x une partie quelconque du rayon AF parcourue par la tangente AH, nous aurons *par conſtruction* $b : a :: y : x$, donc $ay = bx$, donc $y = \frac{bx}{a}$, *équation à la quadratrice.*

NOTE XIX.

L'ARTICLE 31, *pag.* 36 a besoin de deux éclaircissements; on les trouvera dans les réponses aux questions suivantes.

Question 1. En mettant pour x sa valeur $\frac{ay}{b}$, & en divisant ensuite le tout par $b - y$; comment a-t-on trouvé $\frac{bss - yss}{aa - ax} = \frac{bss}{aa}$?

Réponse. 1°. En supposant $x = \frac{ay}{b}$, l'on aura $aa - ax = aa - \frac{aay}{b} = \frac{aab - aay}{b}$.

2°. $aa - ax = \frac{aab - aay}{b}$; donc $\frac{bss - yss}{aa - ax}$ sera égal à $bss - yss$ divisé par $\frac{aab - aay}{b}$.

3°. $bss - yss$ divisé par $\frac{aab - aay}{b}$ donne évidemment $\frac{bbss - byss}{aab - aay}$.

4°. Divisez par $b - y$ le numérateur & le dénominateur de cette derniere fraction, vous aurez $\frac{bss}{aa}$.

Seconde Question. En supposant $FT = \frac{bss}{aa}$, comment peut-on prouver que FT est troisieme proportionnelle à $FG = \frac{aa}{b}$, & à $FM = s$?

Réponse. La troisieme proportionnelle aux quantités $\frac{aa}{b}$ & s est $\frac{bss}{aa}$, puisque $\frac{aa}{b} : s :: s : \frac{bss}{aa}$; donc &c.

NOTE XX.

LES remarques suivantes ne seront pas inutiles pour l'intelligence de l'article 32, *pag.* 37.

1°. On peut regarder mR, *Fig.* 18. *Pl.* 2, comme paralléle à MF, parce que l'angle MFR est est supposé infiniment petit, & par conséquent sensiblement nul. Par la même raison les lignes mS & mO peuvent être regardées comme paralléles, l'une à MG & l'autre à MH.

2°. Le centre commun de gravité des poids appliqués en C, D, E, que j'appellerai les poids C, D, E, est le point autour duquel ces poids étant suspendus comme autour du point fixe d'un levier quelconque, resteroient dans un parfait équilibre.

3°. Pour trouver le centre commun de gravité des poids C, D, E, je cherche d'abord celui des poids D & E par la régle suivante; la somme des poids D & E : à la longueur de la ligne qui marque la distance de leurs centres : : le poids D : à la distance du poids E au centre commun de gravité que je cherche, & que je nomme x. Cette premiere opération faite, je rassemble mentalement les poids D & E à leur centre commun de gravité x; & pour trouver le centre commun de

gravité des trois corps donnés, je dis, la somme des poids C, D, E : à la longueur de la ligne qui marque la distance du point x au centre du poids C : : le poids C : à la distance du point x au centre commun de gravité des poids C, D, E. Ce centre se trouvera dans la ligne MP à laquelle sont perpendiculaires les lignes CL, KD, IE; & comme la tangente au point M est paralléle aux lignes CL, KD, IE, il s'ensuit que MP est perpendiculaire à la tangente au point M; donc la perpendiculaire que l'on cherche pour la solution du problême proposé, est celle qui passe par le centre commun de gravité des poids C, D, E.

NOTE XXI.

Des lignes a, b dont il est parlé sur la fin de l'*article* 34, *pag.* 44, l'une b est tirée d'un point quelconque de la courbe perpendiculairement à la *directrice*, l'autre a est tirée du même point au *foyer*. Or il est évident que dans la parabole a est égal à b, que dans l'ellipse a est moindre, & que dans l'hyperbole a est plus grand que b.

NOTE XXII.

M. le Marquis de l'Hôpital assure à la fin de l'*article* 36, *page* 45, que MR, *Fig.* 25. *Pl.* 2, est égal à $\frac{OP \times MQ + QS \times PM}{PQ}$. Pour le faire toucher au doigt, il auroit dû tirer la ligne OV, paralléle à QP; il a été absolument nécessaire,

pour nous rendre intelligible, d'ajouter cette ligne OV à la figure 25. Cela une fois fait, voici comment je raisonne.

1°. A cause des triangles semblables OVS, OLR, l'on a OV : OL :: VS : LR; l'on a donc PQ : PM :: VS : LR. Mais VS = QS − QV = QS − OP; donc PQ : PM :: QS − OP : LR; donc $LR = \frac{PM \times \overline{QS - OP}}{PQ}$.

2°. MR = LR + OP; donc $MR = \frac{PM \times \overline{QS - OP} + PQ \times OP}{PQ}$.

3°. PQ = PM + MQ; donc $MR = \frac{PM \times \overline{QS - OP} + OP \times \overline{PM + MQ}}{PQ}$; donc l'on aura, en ôtant les quantités qui se détruisent $MR = \frac{PM \times QS + OP \times MQ}{PQ}$. Prenez garde à la faute qui se trouve à la page 46; elle est marquée dans l'*errata*.

NOTE XXIII.

POUR mettre à la portée de tout le monde l'*article* 39, *pag.* 48, il est nécessaire de faire connoître la *logarithmique* représentée par la *Figure* 80 *de la Planche* 5. C'est une courbe dont les abscisses sont les logarithmes des ordonnées, c'est-à-dire, c'est une courbe dont les abscisses suivent la proportion arithmétique, & les ordonnées la proportion géométrique. En voici la description. Sur la ligne KQ qu'on pourra prolonger à volonté, élevez les deux perpendiculai-

res PM, *fn*. Coupez P*f* en deux parties égales au point *p*. Elevez à ce point la perpendiculaire *pm* qui ſoit moyenne proportionnelle aux lignes PM & *fn*. Prenez *fg* = *pf*. Elevez au point *g* la perpendiculaire *go* qui ſoit troiſieme proportionnelle aux lignes *pm*, *fn* ; la courbe que vous tirerez par les points M, *m*, *n*, *o* ſera une portion de la *logarithmique*. En effet, tandis que les ordonnées PM, *pm*, *fn*, *go* gardent la proportion géométrique continue, les abſciſſes correſpondantes P*p*, P*f*, P*g* gardent la proportion arithmétique continue ; donc P*p* peut être regardé comme le logarithme de *pm* ; P*f* comme le logarithme de *fn* ; P*g* comme le logarithme de *go*, &c. Dans cette courbe, il eſt vrai, la ligne PM n'a point de logarithme ; mais dans le fait elle ne doit en avoir aucùn, puiſqu'elle eſt priſe pour l'*unité*, & que le logarithme de l'*unité* eſt *o*.

Ce qu'il faut bien remarquer, c'eſt que dans toute *logarithmique* les ſoutangentes ſont égales, *par exemple*, les ſoutangentes *pb*, *fe*, &c. ſont égales. Cela vient de ce que P*p*, *pf*, &c. ſont des quantités égales entr'elles, de même que M*m*, *mn*, &c. Voilà pourquoi M. le Marquis de l'Hôpital annonce que lorſque la ſoutangente demeurera par tout la même, la courbe LM, (*Fig*. 26. *Pl*. 2.) ſera *logarithmique*.

NOTE XXIV.

COMME l'*article* 40, *page* 49 ſera appliqué à la *logarithmique ſpirale*, il eſt néceſſaire de don-

ner ici la description de cette courbe. Divisez le quart de cercle BGD, (*Fig.* 87. *Pl.* 5.) en un nombre quelconque de parties égales B*b*, *b*G, G*g*, *g*D. Sur les rayons O*b*, OG, O*g*, prenez les parties ON, O*n*, O*r* en proportion continue; les points N, *n*, *r* appartiendront à la *logarithmique spirale*. Cette courbe a pour appliquées les lignes ON, O*n*, O*r*, ou si l'on veut, *b*N, G*n*, *gr* qui sont en proportion géométrique continue, & pour abscisses correspondantes les arcs B*b*, BG, B*g* qui sont en proportion arithmétique continue. Aussi peut-on regarder celles-ci comme les logarithmes de celles-là.

C'est dans l'article 42 que se fait l'application de l'artitle 40 à la logarithmique spirale. L'on y suppose que la courbe FQ (*Fig.* 27. *Pl.* 2.) est une hyperbole dont AB est l'une des assymptotes. Nous avons déja fait remarquer dans la *Note* 5. *num.* 20. que AG×GQ est un rectangle égal à un quarré constant que M. de l'Hôpital nomme ici ff; donc $uy = ff$; donc GQ (u) $= \frac{ff}{y}$; donc, en supposant le point G au point A, l'on aura GQ $= \frac{ff}{o} = \infty$; aussi GQ devient-elle alors seconde assymptote de l'hyperbole FQ. L'espace FEGQ est donc regardé comme infini à cause de son côté infini GQ.

Lorsque AG devient $= o$, l'on a AM (y) $= o$; donc $uy = ff$, devient $ff = o$, & par la même AT ($\frac{ffy}{cc}$) devient $\frac{o}{cc} = o$; donc lorsque

le point M de la courbe ML eſt arrivé au centre du cercle BN, c'eſt-à-dire, lorſque AM $= o$, l'on a AT $= o$. D'où l'on voit que la raiſon de AM à AT eſt conſtante ; ce qui eſt une propriété de la logarithmique ſpirale. Tout ceci s'éclaircira encore plus par la lecture de l'*article* 91, *pag* 127, où l'on verra que AM : AT : : AC : CM, (*Fig.* 81. *Pl.* 5.) Nous remarquerons en finiſſant cette Note, que l'on donne quelquefois le nom d'*axe* à la ligne des abſciſſes ; ce n'eſt qu'en ce ſens que l'on peut regarder l'aſſymptote AB (*Fig.* 27. *Pl.* 2.) comme axe de l'hyperbole FQ.

NOTE XXV.

COMME la maniere dont M. le Marquis de l'Hôpital tire dans la propoſition 16 les tangentes des courbes AM, BN, CO, (*Fig.* 32. *Pl.* 3.) n'a aucun rapport avec ce qu'il a dit dans toute ſa ſeconde Section ſur la méthode de trouver par le calcul différentiel les tangentes de toutes ſortes de lignes courbes, nous ne donnerons aucun commentaire de cette propoſition qui dans le fond nous paroit ici aſſez déplacée. Nous remarquerons cependant que c'eſt par ſon inertie que le poids A s'oppoſe à la direction BF du poids B. Nous remarquerons encore que ce qu'on a dit du poids A par rapport au poids B, doit ſe dire des poids A & B par rapport au poid C ; car A eſt ſenſiblement égal à la fraction $\frac{A \times BF}{BC}$.

NOTE XXVI.

LA régle générale dont on se sert, lorsqu'on veut trouver le *maximum* ou le *minimum* d'une courbe, est celle-ci : *Dans le point où la quantité est devenue la plus grande, son accroissement est devenu nul, & dans le point où elle est devenue la plus petite, son décroissement est aussi devenu nul. D'où il suit qu'ayant différentié l'équation qui exprime la quantité dont il s'agit, ou qui convient à la courbe dont il s'agit, il faut faire* $= 0$ *la différentielle de la variable qui va en croissant, puis en décroissant; ou en décroissant, puis en croissant; & l'équation différentiée pouvant être réduite par ce moyen à des termes finis, elle exprimera le* maximum, *ou le* minimum *qu'on cherche.*

Pour trouver, *par exemple*, la plus grande ordonnée au grand axe AB de l'ellipse ADB (*Fig.* 30. *Pl.* 2.) nommons $2a$, le grand axe AB; $2b$, le petit axe, & par conséquent b, le demi-petit axe DE; nommons y, une ordonnée quelconque au grand axe; & x, son abscisse correspondante. Cela supposé, voici comment je raisonne.

1°. L'équation à l'ellipse est $aayy = 2abbx - bbxx$ (*Note* 5. *num.* 10).

2°. Cette équation différentiée devient $2aaydy = 2abbdx - 2bbxdx$.

3°. Comme l'ordonnée qu'on cherche, est supposée arrivée à son *maximum*, elle aura à ce point sa différentielle $dy = o$, donc $2aay \times dy = 2aay$

xo; donc $2aaydy = o$; donc $2abbdx - 2bbxdx = o$; donc $2abbdx = 2bbxdx$; donc, en divisant tout par $2bbdx$, l'on aura $a = x$; donc lorsque dans l'ellipse l'abscisse x devient a, l'ordonnée correspondante y est arrivée à son *maximum*; donc lorsque dans l'ellipse l'abscisse devient la moitié du grand axe, l'ordonnée correspondante est arrivée à son *maximum*. Mais le demi-petit axe DE a pour abscisse correspondante AE, moitié du grand axe AB; donc dans une ellipse quelconque la moitié du petit axe est la plus grande ordonnée à l'axe principal.

Voilà comment il faut opérer, lorsqu'on veut trouver le *maximum* ou le *minimum* d'une courbe quelconque dont l'équation est donnée. Voici ce que veut dire M. le Marquis de l'Hôpital, lorsqu'il assure qu'il y a des occasions où une quantité ne peut pas devenir de positive négative, sans passer par l'infini. Toutes les tangentes TM, *par exemple*, tirées jusqu'au point D exclusivement (*Fig.* 30. *Pl.* 2.) ont des soutangentes TP qui vont toujours en augmentant jusqu'au point E, & qui jusqu'à ce point sont regardées comme des quantités positives. Au point D la tangente TM devient infinie, & sa soutangente TP qui lui est paralléle, suit nécessairement le même sort. Après le point D, les tangentes TM & les soutangentes TP vont toujours en diminuant, & celles-ci sont regardées comme des quantités négatives, puisqu'elles changent de côté; donc il y a des occasions où une quantité finie ne peut pas

devenir de poſitive négative, ſans paſſer par l'infini. Ce que nous avons dit de la figure 30 par rapport au *maximum* D E, ſe vérifie dans la figure 31 par rapport au *minimum* D E.

Il y a des occaſions où la tangente ſe confond avec l'ordonnée, c'eſt-à-dire, où la tangente devient la prolongation de l'ordonnée, comme au point D de la figure 33 de la planche 3, auquel il ſeroit impoſſible de tirer une tangente, ſans qu'elle ne fît une même ligne avec le *minimum* D E. Alors la différentielle R*m* devient infinie. Mais avant que de devenir infinie, elle avoit été poſitive, & après être devenue infinie, elle eſt négative, parce qu'elle change de côté; donc il y a des occaſions où une quantité infiniment petite ne peut pas devenir de poſitive négative, ſans paſſer par l'infini. La figure 34 de la planche 3, prête à un raiſonnement ſemblable; tout le monde voit que la tangente au point D ſe confondroit avec le *maximum* D E. Mais ce ſont là des raiſonnemens qu'il ne faut pas pouſſer trop loin, de peur de ſe perdre dans une métaphyſique inintelligible. Contentons-nous de différentier l'équarion donnée; de faire la différentielle $= o$; & ſoyons aſſuré que ſi la courbe à laquelle appartient l'équation donnée, a un *maximum* ou un *minimum*, nous le trouverons par cette méthode. Je dis, ſi la courbe dont il s'agit, a un *maximum* ou un *minimum*, parce que les courbes dont les appliquées croiſſent juſqu'à l'infini, n'ont point de *maximum*, & celles dont les appliquées dé-

croiſſent

croissent jusqu'à o, n'ont point de *minimum*.

NOTE XXVII.

COMME l'*article* 48, *pag.* 59, contient le premier des 13 exemples auxquels M. le Marquis de l'Hôpital a appliqué la méthode de *Maximis & Minimis*, nous allons en donner le calcul, sans omettre la moindre des équations. Le voici ; il n'a besoin d'aucune explication.

$$x^3 + y^3 = axy$$
$$3xxdx + 3yydy = aydx + axdy$$
$$3xxdx - aydx = axdy - 3yydy$$
$$3xxdx - aydx = ax \times o - 3yy \times o$$
$$3xxdx - aydx = o$$
$$3xxdx = aydx$$
$$3xx = ay$$
$$\frac{3xx}{a} = y$$

Mettons la nouvelle valeur de y dans l'équation $x^3 + y^3 = axy$, nous aurons

$$x^3 + \frac{27x^6}{a^3} = \frac{3ax^3}{a}$$
$$x^3 + \frac{27x^6}{a^3} = 3x^3$$
$$\frac{27x^6}{a^3} = 2x^3$$
$$27x^6 = 2a^3x^3$$
$$3x^2 = \sqrt[3]{2a^3x^3}$$
$$3x^2 = ax\sqrt[3]{2}$$
$$3x = a\sqrt[3]{2}$$
$$x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$$

NOTE XXVIII.

L'ARTICLE 49, *pag.* 60 a besoin du Commentaire suivant. Pour trouver AE $= a$, il n'étoit pas nécessaire de se jetter dans l'infini ; il falloit élever au cube les 2 membres de l'équation donnée, & opérer par la méthode ordinaire en la maniere suivante :

$$y - a = a^{\frac{1}{3}} \times \overline{a - x}^{\frac{2}{3}}$$

$$y - a = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{aa - 2ax + xx}$$

$$y^3 - 3ayy + 3aay - a^3 = a \times \overline{aa - 2ax + xx}.$$

$$y^3 - 3ayy + 3aay - a^3 = a^3 - 2aax + axx$$

En différenciant cette derniere équation, l'on aura

$$3yydy - 6aydy + 3aady = - 2aadx + 2axdx$$

$$3yy \times o - 6ay \times o + 3aa \times o = - 2aadx + 2axdx$$

$$o = - 2aadx + 2axdx$$

$$2aadx = 2axdx$$

$$adx = xdx$$

$$a = x$$

NOTE XXIX.

L'ARTICLE 50, *pag.* 60 ne peut paroitre obscur, qu'à ceux qui ne connoitroient pas la nature, ou les proprietés de la roulette ; nous les avons expliquées dans les notes 11 & 12.

NOTE XXX.

L'ON comprendra l'*article* 51, *pag.* 61, si l'on fait attention aux remarques suivantes.

1°. $\overline{a-x}^{n-1}$ multiplié par $\overline{a-x}$ donne évidemment pour produit $\overline{a-x}^{n}$, parce que $\overline{a-x}^{n-1}$ multiplié par $\overline{a-x}$, c'eſt $\overline{a-x}^{n-1}$ élevé d'un degré ; donc $\overline{a-x}^{n}$ diviſé par $\overline{a-x}^{n-1}$ doit donner pour quotient $a-x$, parce que le produit diviſé par le multiplicande eſt toujours égal au multiplicateur.

2°. Par la même raiſon x^m diviſé par x^{m-1} doit donner pour quotient x, car x^{m-1} multiplié par x donne pour produit x^m.

3°. En ſuppoſant x infinie, l'on aura $\frac{xx}{x-a} = \frac{xx}{x}$ (*Note* 2. *num.* 4) ; donc en ſuppoſant x infinie, l'on aura $y = \frac{xx}{x}$, & par conſéquent $y = x$.

NOTE XXXI.

L'ARTICLE 52, *pag.* 63, eſt terminé par une équation du ſecond degré qui demande les éclairciſſements ſuivants.

1°. $cxx - axx - bxx = xx \times \overline{c-a-b}$; donc en faiſant $c-a-b=e$, l'on aura $exx = cxx - axx - bxx$; & l'équation qui termine l'article 52 ſe changera en celle-ci $exx + 2acx = abc$.

2°. $exx + 2acx = abc$, donc $xx + \frac{2ac}{e}x = \frac{abc}{e}$.

3°. Cette derniere équation maniée à la maniere ordinaire, donnera $x = \sqrt{\frac{abc}{e} + \frac{aacc}{ee}} - \frac{ac}{e}$.

4°. Si $c = a + b$, l'on aura $c - a - b = 0$, &

par conséquent $cxx - axx - bxx = o$; donc l'équation qui termine l'article 52 deviendra $2acx = abc$; donc $2x = b$; donc $x = \frac{1}{2} b$.

NOTE XXXII.

Voici ce qui peut arrêter un commençant dans la lecture de l'*article* 53, *pag.* 64.

1°. Le cone que décrira le triangle rectangle AEF, *Fig.* 40. *Pl.* 3, aura pour base le cercle dont le rayon sera l'ordonnée FE, & pour hauteur la ligne EA. De même le cone que décrira le triangle rectangle APN, aura pour base le cercle dont le rayon sera l'ordonnée NP, & pour hauteur la ligne AP. Voyez la formation du cone dans les élémens de Géométrie de M. l'Abbé de la Caille, *art.* 658 de l'édition de 1764.

2°. Par la propriété du cercle, l'on aura AE : EF :: EF : EB; donc $EF^2 = ax - xx$; donc $EF = \sqrt{ax - xx}$.

3°. $AF^2 = EF^2 + AE^2$; donc $AF^2 = ax - xx + xx$; donc $AF^2 = ax$; donc $AF = \sqrt{ax}$.

4°. La fraction qui termine l'article 53 ne peut pas être $= o$, sans que l'on ait son numérateur $2axdx - 3xxdx = o$; l'on aura donc alors $2axdx = 3xxdx$; donc $2ax = 3xx$; donc $2a = 3x$; donc $x = \frac{2}{3} a$.

NOTE XXXIII.

Un parallélepipéde est un solide terminé par six surfaces rectangles, dont les deux opposées sont égales & paralléles; & un cube est un so-

lide terminé par ſix quarrés égaux, qui ſont tous à angles droits l'un ſur l'autre. Tout cube eſt donc un parallélepipéde, mais tout parallélepipéde n'eſt pas un cube. Il s'agit maintenant de bien ſe convaincre que ſi $x = \sqrt{\frac{a^3}{b}}$, l'on aura $\frac{a^3}{bx} = \sqrt{\frac{a^3}{b}}$; en voici la démonſtration.

1°. $xx = \frac{a^3}{b}$.

2°. Le quarré de $\frac{a^3}{bx}$ eſt $\frac{a^6}{bbxx}$; donc $\frac{a^6}{bbxx} = \frac{a^6 b}{a^3 bb} = \frac{a^3}{b}$; donc ſi le quarré de $\frac{a^3}{bx}$ eſt $\frac{a^3}{b}$, l'on aura $\frac{a^3}{bx} = \sqrt{\frac{a^3}{b}}$.

NOTE XXXIV.

DANS le triangle rectangle GIE, *Fig.* 41. *Pl.* 3, ſi l'on prend l'hypothénuſe GE pour ſinus total, le côté GI deviendra le ſinus droit de l'angle GEI. Par la même raiſon dans le triangle rectangle GLE, l'on ne peut pas prendre GE pour ſinus total, ſans avoir GL pour ſinus droit de l'angle GEL, & de ſon ſupplément GEC; ce ſont là les premiers éléments de la Trigonométrie rectiligne.

NOTE XXXV.

L'ARTICLE 58, *pag.* 69 me paroit traité avec moins d'exactitude que les autres; & les preuves que j'ai à en apporter, ne ſont par malheur que trop démonſtratives.

1°. L'angle FEG étant égal à l'angle CEG, *Fig.* 42, *Pl.* 3; les angles en G étant droits, & le côté GE étant commun aux deux triangles FGE & CGE; il falloit faire ces deux triangles égaux en tout ſens : c'eſt là une inadvertance qui choque la vue d'un lecteur exact & attentif.

2°. En ſuppoſant que l'angle FEG doive être égal à l'angle CEG, le problême eſt très facile à réſoudre. Le point E que l'on cherche, ſera celui par lequel paſſera le rayon du cercle AEB qui, après avoir été prolongé, ira couper perpendiculairement la ligne CF, c'eſt-à-dire, la ligne qui joint les deux points donnés C, F. Il ne ſera pas donc néceſſaire de chercher ce point par l'interſection du cercle & de l'hyperbole.

3°. La ligne $OB = a$, & la ligne $OC = b$, ne ſont pas les données a & b dont on parle dans les articles 56 & 57. En effet l'angle FEG n'eſt égal à l'angle CEG, que lorſque $a = b$. Mais OB n'eſt pas égal à OC dans l'*article* 58, & cependant dans cet article on ſuppoſe l'angle FEG égal à l'angle CEG; donc &c.

4°. Quoiqu'il me paroiſſe fort inutile de réſoudre le problême de l'*article* 58 par l'interſection du cercle & de l'hyperbole, nous remarquerons cependant que $yy - xx - \frac{aay}{c} + \frac{aax}{b} = o$ eſt un lieu à une hyperbole équilatére, dont le grand axe ſeroit $2\sqrt{\frac{a^4}{4bb} - \frac{a^4}{4cc}}$. On trouvera ce grand axe en comparant, par la méthode ordinaire, l'équation donnée avec la formule générale qui ſe

trouve dans le Traité des Sections coniques de M. le Marquis de l'Hôpital, *pag.* 234, ou avec celle qui se trouve dans le premier Tome du Cours de Mathématique de Wolf, *pag.* 382. Or le grand axe d'une hyperbole équilatére étant donné, la construction de l'hyperbole se présente d'elle même, parce que dans cette courbe le grand axe, le petit axe & le paramètre ont la même valeur.

NOTE XXXVI.

L'ÉTAT de la question de l'*article* 59, *pag.* 70, est très mal énoncé. Aussi les remarques suivantes nous paroissent-elles absolument nécessaires.

1°. *a* & *b* ne marquent pas les espaces parcourus dans un tems quelconque *c*, mais la nature des différents terreins qu'il faut parcourir en deça & en delà de la ligne AB. En effet puisqu'on suppose le tems *c* égal, ou plutôt constant de part & d'autre, & que l'on suppose inégaux les espaces parcourus CE & EF, on ne peut pas supposer que la nature du terrein soit par tout la même.

2°. En examinant attentivement la *Fig.* 43 de la *Pl.* 3, vous vous convaincrez qu'en prenant CE pour sinus total dans le triangle rectangle CAE, & GE pour sinus total dans le triangle rectangle GLE, AE & GL deviennent les sinus droits de deux angles égaux; donc AE = GL. De même en prenant GE pour sinus total dans le triangle GIE, & EH pour sinus to-

tal dans le triangle EDH, GI & ED deviendront les ſinus droits de deux angles égaux ; donc GI = ED.

3°. Pour trouver la valeur de x, l'on opérera ſur l'équation propoſée ſuivant les regles marquées dans tous les livres élémentaires d'algébre ; nous avons droit de ſuppoſer qu'on ne lit pas les Infiniment Petits de M. le Marquis de l'Hôpital, ſans avoir appris auparavant à manier une équation du quatrieme degré.

4°. Pour manier plus facilement l'équation propoſée, vous ferez $aa - bb = m$; $-2aaf + 2bbf = n$; $+aaff + aagg - bbff - bbhh = p$; $-2aafgg = -q$; $aaffgg = r$; & l'équation propoſée ſe transformera en celle-ci, $mx^4 + nx^3 + px^2 - qx + r = 0$; donc $x^4 + \frac{n}{m}x^3 + \frac{p}{m}x^2 - \frac{q}{m}x + \frac{r}{m} = 0$.

Pour opérer plus facilement ſur cette équation transformée, faites $\frac{n}{m} = a$, $\frac{p}{m} = b$, $\frac{q}{m} = c$, $\frac{r}{m} = d$, vous aurez $x^4 + ax^3 + bz^2 - cx + d = 0$.

5°. Vous ferez évanouir le ſecond terme de cette derniere équation, en faiſant $x = z - \frac{1}{4}a$, parce que *ſi dans une équation ſupérieure, le ſecond terme eſt poſitif, l'on augmente la racine* x *d'une quantité fractionnaire qui ait pour numérateur le coéfficient du ſecond terme, & pour dénominateur l'expoſant du premier terme de l'équation donnée ; l'on a par ce moyen une équation transformée dont le ſecond terme eſt évanoui.*

6°. Vous chercherez la nouvelle valeur de l'é-

quation $x^4 + ax^3 + bx^2 - cx + d = o$, en ſuppoſant $x = z - \frac{1}{4}a$; vous trouverez une nouvelle équation dans laquelle le ſecond terme ſera évanoui.

7°. Pour réduire cette nouvelle équation aux termes les plus ſimples, vous appellerez f les différents coefficients de zz; vous appellerez g les différents coéfficients de z; vous appellerez enfin h l'aſſemblage des connues qui forment le dernier terme de l'équation; & vous aurez $z^4 * + fz^2 + gz + h = o$.

8°. Vous opérerez ſur cette équation du quatrieme degré, comme ont fait en pareille occaſion Wolf dans ſon cours de Mathématique, *Tom.* 1. *pag.* 336; Clairaut dans ſes Éléments d'Algébre, *pag.* 287; Rabuel dans ſon commentaire ſur la géométrie de Deſcartes, *pag.* 473. Tout homme qui entreprend l'étude des infiniment petits doit, ou avoir lu les livres que nous venons de citer, ou être en état de les lire ſans y rencontrer preſque aucune difficulté.

NOTE XXXVII.

Les remarques ſuivantes jetteront un grand jour ſur l'*article* 61. *pag.* 74.

1°. L'on ne doit pas entreprendre la lecture de l'article 61, ſans s'être auparavant formé une idée nette de la ſphére.

2°. Le crépuſcule eſt un jour imparfait que l'on a quelque tems avant le lever, & quelque tems après le coucher du Soleil. Voici la cauſe phyſique de ce phénoméne. Lorſque le Soleil n'eſt

pas enfoncé ſous notre horizon au deſſous de 18 degrés, pluſieurs rayons de lumiere rencontrent des couches aſſez denſes de l'athmoſphére terreſtre. Quelques-uns s'y briſent aſſez, pour que leur réfraction les détermine à ſe porter vers la terre. Quelques autres (& c'eſt le grand nombre) s'y briſent aſſez pour pouvoir ſe rendre dans des couches compoſées de particules capables de les réflechir ſur la ſurface de la terre; donc nous devons avoir un jour imparfait, lorſque le Soleil n'eſt pas enfoncé au deſſous de notre horizon de 18 degrés. Au reſte lorſqu'on parle d'un enfoncement de 18 degrés, on entend 18 degrés pris ſur un cercle vertical, c'eſt-à-dire, ſur un grand cercle que l'on imagine paſſer par le zénith, & couper perpendiculairement l'horizon. C'eſt pourquoi les habitans de la zone torride ont des crépuſcules fort courts, parce que les cercles que parcourt le Soleil étant preſque perpendiculaires à leur horizon, cet aſtre gagne fort vite le 18e. degré de ſon abaiſſement.

3°. La ligne CK (fig. 45. pl. 3) n'eſt pas préciſément le ſinus de l'arc EM, mais elle eſt égale à ce ſinus. Pour s'en convaincre, il faut chercher ſur une ſphére le ſinus de l'arc de la déclinaiſon du Soleil pour tel ou tel jour. Vous trouverez qu'il eſt égal à la partie du diamétre du cercle de déclinaiſon, interceptée entre le centre de la ſphére & le diamétre du paralléle que décrit ce jour là le Soleil. Mais CK eſt la partie du diamétre du cercle de la déclinaiſon du Soleil, in-

terceptée entre le centre C de la ſphére, & la ligne FG, diamétre du parallèle que décrit le Soleil le jour du plus petit crépuſcule; donc la ligne CK eſt égale au ſinus de l'arc de la déclinaiſon du Soleil, le jour du plus petit crépuſcule.

4°. Un des points les plus importants de la démonſtration de l'article 61 eſt que D*d* ſoit égal à E*e*, & que la différence entre GD, *gd* ſoit égale à la différence entre FE & *fe*. Or toutes ces égalités ſont néceſſaires dans une figure où l'on a tiré les quarts de cercle P*em* & P*dn* infiniment proches des quarts de cercle PEM & PDN, & dans laquelle l'on ſuppoſe le plan *fedg* paralléle au plan FEDG, & infiniment près de ce plan.

5°. Par l'article 50, l'on a ces 2 proportions, CO : CG : : D*d* : à la différence entre DG & *dg*; & IQ : IF : : E*e* : à la différence entre FE & *fe*; donc CO : CG : : IQ : IF; donc CO : CG : : CO + IQ : CG + IF; donc CO : CG : : OX : GL. Mais à cauſe des triangles rectangles ſemblables CVO, CKG, FLG, l'on a CO : CG : : OV : GK; donc OV : GK : : OX : GL; donc OV : OX : : GK : GL. Mais GK : GL : : CK : FL ou QX; donc OV : OX : : CK : QX; donc OV : CK : : OX : QX : : QX : XH; donc OV : CK : : QX : XH; donc QX : XH : : OV : CK; donc le ſinus total : à la tangente de 9 degrés : : le ſinus de l'élévation du pole : au ſinus de la déclinaiſon auſtrale du Soleil dans le tems du plus petit crépuſcule; & voila le problême réſolu.

6°. Il eſt démontré dans tous les élémens de

Trigonométrie que le rayon ou ſinus total : à la tangente : : la cotangente : au rayon ; donc la cotangente de 9 degrés : au rayon, que l'on ſuppoſe $= 1$, : : le ſinus de l'élévation du pole : au ſinus de la déclinaiſon ; donc ſi l'on ôte du logarithme du ſinus de l'élévation du pole le logarithme de la cotangente de 9 degrés, le reſte ſera le logarithme du ſinus cherché, parce que le logarithme de $1 = o$. Il n'eſt pas néceſſaire de faire remarquer que dans ſon calcul M. le Marquis de l'Hôpital s'eſt ſervi de Tables qui donnent *o* pour caractériſtique aux logarithmes dont la caractériſtique eſt 10 dans les tables ordinaires.

NOTE XXXVIII.

Il ſuit évidemment de la définition 1 qu'apporte M. le Marquis de l'Hôpital au commencement de la Section IV, que Sn (*Fig.* 46, *Pl.* 3,) eſt la *différence* de la *différence* mR, ou la *différence ſeconde* de PM. C'eſt cependant Hn qui eſt la *différence ſeconde* de PM, comme notre Auteur en convient. Je voudrois donc dire que la *différence ſeconde* de PM n'eſt autre choſe que la différence qui ſe trouve entre la *différence premiere* mR, & ſon augmentation Sn ; & qu'en général une *différence ſeconde quelconque* n'eſt autre choſe que la différence qui ſe trouve entre la *différence premiere* & ſon *augmentation* ou *diminution* ſuivante. En effet $Hn = m\text{R} - Sn$.

Il ſuit encore de la même définition que oT devroit être la différence troiſieme de PM. Cepen-

dant M. le Marquis de l'Hôpital nous avertit que la *différence* troisieme de PM n'est autre chose que la différence qui se trouve entre H*n* & L*o*. La différence troisieme de PM est donc la différence qui se trouve entre sa différence seconde H*n*, & une ligne quelconque L*o* dont les propriétés sont 1. d'être paralléle à H*n*, 2. d'être extérieure à la courbe AMD, 3. d'être terminée par la ligne *n*L parallèle à ST. Il seroit bien difficile de donner une définition claire de la différence troisieme considérée en général.

NOTE XXXIX.

L'AVERTISSEMENT qui suit la définition 1 de la Section IV, fait toujours quelque peine aux commençans. Ils s'imaginent que $dy \times dy$ doit donner $ddyy$ ou d^2y^2, & que par conséquent le quarré de dy doit être d^2y^2, & non pas dy^2; son cube, d^3y^3, & non pas dy^3 &c. C'est là une erreur dont il est facile de se guerir, lorsqu'on fait attention que dy est une quantité très simple, & non pas une quantité composée de d multipliant y. Par la même raison le quarré de ddy sera ddy^2, son cube ddy^3 &c.

NOTE XL.

POUR comprendre l'article 65, il faut se rappeller les régles que M. le Marquis de l'Hôpital a données à l'article 6, & les calculs qu'il a faits sur la fin de l'article 7. Il faut encore se rappeller

ce que nous avons dit nous-mêmes dans les notes 3 & 4. Comme il s'agit cependant de mettre au fait les commençans du calcul des différences secondes, troisiemes &c. nous allons commenter l'article 65 avec toute l'étendue dont il pourra être susceptible; notre commentaire sera renfermé dans les réponses aux questions suivantes.

Premiere Question. Comment peut-on prouver, qu'en prenant dx pour constante, la différence de $\frac{ydy}{dx}$ est $\frac{dy^2 + yddy}{dx}$?

Réponse. 1°. La différence de ydy est $dy \times dy + yddy = dy^2 + yddy$.

2°. La différence de la fraction $\frac{ydy}{dx}$, en supposant que dx est une grandeur constante, est $\frac{dx \times dy^2 + dx \times yddy}{dx \times dx} = \frac{dy^2 + yddy}{dx}$; donc &c.

Seconde Question. Comment peut-on prouver que la différence de $\frac{ydy}{dx}$ est $\frac{dxdy^2 - ydyddx}{dx^2}$, en prenant dy pour une quantité constante?

Réponse. 1°. Quoique dy soit constante, y est variable; la différence de ydy est donc $dy \times dy = dy^2$.

2°. La différence de dx est ddx.

3°. La différence de la fraction $\frac{ydy}{dx}$, en supposant dy constante, est $\frac{dx \times dy^2 - ydy \times ddx}{dx \times dx} = \frac{dxdy^2 - ydyddx}{dx^2}$; donc &c.

Troisieme Question. Comment peut-on prouver que la différence de $\frac{z\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$ est $\frac{dzdx^2 + dzdy^2 + zdyddy}{dx\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, en prenant dx pour une quantité constante.

Réponse. 1°. La différence de z multipliée par $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ & divisée par dx est $\frac{dx \times dz \times \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx \times dx}$ $= \frac{dz\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$.

2°. La différence de $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, en supposant dx constant, est $\frac{2dyddy}{2\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$; donc la différence de $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ multipliée par z & divisée par dx sera $\frac{dx \times z \times dyddy}{dx^2 \times \sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{zdyddy}{dx\sqrt{dx^2 + dy^2}}$.

3°. Pour avoir la différence de la fraction $\frac{z\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$, il faut joindre les différences trouvées *num.* 1 & 2; donc la différence de la fraction proposée sera $dz\sqrt{dx^2 + dy^2} + \frac{zdyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, le tout divisé par dx.

4°. $dz\sqrt{dx^2 + dy^2} + \frac{zdyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} =$ $\frac{dz \times \overline{dx^2 + dy^2} + zdyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, parce que $\sqrt{dx^2 + dy^2} \times \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx^2 + dy^2$; donc la différence de la

fraction $\frac{z\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}$ sera $\frac{dz \times \overline{dx^2 + dy^2} + zdyddy}{dx\sqrt{dx^2 + dy^2}}$

$$= \frac{dzdx^2 + dzdy^2 + zdyddy}{dx\sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

Quatrieme Question. Comment peut-on prouver qu'en prenant dy pour constante, l'on aura $\frac{dzdx^3 + dzdxdy^2 - zdy^2ddx}{dx^2\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ pour la différence de

$\frac{z\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$.

Réponse. 1°. La différence de z multipliée par $\sqrt{dx^2 + dy^2} = dz\sqrt{dx^2 + dy^2}$.

2°. En supposant dy constant, la différence de $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{2dxddx}{2\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dxddx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$; donc cette même différence multipliée par z sera $\frac{zdxddx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$; donc la différence totale de

$z\sqrt{dx^2 + dy^2}$ sera $dz\sqrt{dx^2 + dy^2} + \frac{zdxddx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$

$$= \frac{dz \times \overline{dx^2 + dy^2} + zdxddx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dzdx^2 + dzdy^2 + zdxddx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

3°. La question seroit résolue, si on ne demandoit que la différence de $z\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Mais on

demande la différence de $\frac{z\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$, dans laquelle fraction on suppose dx variable. Qu'on se rappelle les régles qu'il faut suivre, lorsqu'il s'agit de différencier une fraction, & l'on

l'on trouvera que la différence de la fraction proposée, est $\frac{dx \times \overline{dzdx^2 + dzdy^2 + zdxddx}}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ — $ddx \times z\sqrt{dx^2 + dy^2}$, le tout divisé par $dx^2 =$
$$\frac{dx \times \overline{dzdx^2 + dzdy^2 + zdxddx} - ddx \times \overline{zdx^2 + zdy^2}}{dx^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}} =$$
$$\frac{dzdx^3 + dzdxdy^2 + zdx^2ddx - zdx^2ddx - zdy^2ddx}{dx^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

4°. Otons les quantités qui se détruisent, nous aurons évidemment $\frac{dzdx^3 + dzdxdy^2 - zdy^2ddx}{dx^2 \sqrt{dx^2 + dy^2}}$ pour la différence de la fraction $\frac{z\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$.

Cinquieme Question. Comment peut-on prouver qu'en prenant *dx* pour constant, la différence de $\frac{ydy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$ doit être $\frac{dx^2dy^2 + dy^4 + ydx^2ddy}{\overline{dx^2 + dy^2} \sqrt{dx^2 + dy^2}}$?

Réponse. 1°. La différence de la quantité *ydy*, solitairement prise, est $dy^2 + yddy$.

2°. La différence de $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, est $\frac{dyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, en prenant *dx* pour constant.

3°. La différence de *ydy*, considéré comme numérateur d'une fraction, est $\overline{dy^2 + yddy} \times \sqrt{dx^2 + dy^2}$ — $\frac{ydy \times dyddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$, le tout divisé par $dx^2 + dy^2$, quarré de $\sqrt{dx^2 + dy^2}$; donc cette différence sera
$$\frac{\overline{dy^2 + yddy} \times \overline{dx^2 + dy^2} - ydy^2ddy}{\overline{dx^2 + dy^2} \sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dx^2dy^2 + dy^4 + ydx^2ddy}{\overline{dx^2 + dy^2} \sqrt{dx^2 + dy^2}},$$

à cauſe des quantités qui ſe détruiſent ; ce ſont $+ydy^2ddy$ & $-ydy^2ddy$.

4°. On prouvera par un calcul ſemblable qu'en prenant dy pour conſtant, la différence de $\frac{ydy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$ ſera $\frac{dx^2dy^2+dy^4-ydydxddx}{dx^2+dy^2\sqrt{dx^2+dy^2}}$.

Sixieme Queſtion. Comment peut-on prouver que $\frac{\overline{dx_2+dy}\sqrt{dx^2+dy}}{-dxddy}$ eſt égal à $\frac{\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$?

Réponſe. 1°. $\overline{dx^2+dy^2} = \overline{dx^2+dy^2}^{1} = \overline{dx^2+dy^2}^{\frac{2}{2}}$.

2°. $\sqrt{dx^2+dy^2} = \overline{dx^2+dy^2}^{\frac{1}{2}}$; donc la fraction propoſée devient $\frac{\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{2}{2}} \times \overline{dx^2+dy^2}^{\frac{1}{2}}}{-dxddy} = \frac{\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$.

Septieme Queſt. Comment peut-on prouver qu'en prenant dx pour conſtant, la différence de $\frac{\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$ eſt $\frac{-3dxdyddy^2 \times \overline{dx^2+dy}^{\frac{1}{2}} + dxdddy \times \overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2ddy^2}$.

Réponſe. 1°. En prenant dx pour conſtant, & en conſidérant $\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}$ comme une quantité iſolée, ſa différence eſt $\frac{3}{2} \times 2dyddy \times \overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}-1} = 3dyddy \times \overline{dx^2+dy^2}^{\frac{1}{2}}$.

2°. En prenant dx pour conſtant, & en conſidérant $-dxddy$ comme une quantité iſolée, ſa différence eſt $-dxdddy$.

3°. En conſidérant ces deux quantités com-

me formant une fraction, leur différence sera

$$\frac{-dxddy \times 3dyddy \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{1}{2}} + dxdddy \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2 ddy^2}$$

$$= \frac{-3dxdyddy^2 \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{1}{2}} + dxdddy \times \overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2 ddy^2}.$$

Huitieme Question. Comment peut-on trouver la différence seconde d'une quantité quelconque, élevée à une puissance quelconque ; *par exemple*, quelle est la différence seconde de x^m, ou la différence premiere de $mx^{m-1}dx$?

Réponse. La différence demandée est $\overline{mm - m}x^{m-2}dx^2 + mx^{m-1}ddx$. En voici la démonstration. Faisons $x^{m-1} = y$, & $dx = z$.

1°. Puisque $x^{m-1} = y$, l'on aura $dy = \overline{m-1}x^{m-2}dx$, parce que dans cette hypothése la différence de y doit être égale à la différence de x^{m-1}.

2°. Puisque $dx = z$ & $x^{m-1} = y$; donc $x^{m-1}dx = yz$; donc $mx^{m-1}dx = myz$; donc la différence de $mx^{m-1}dx$ est égale à la différence du produit myz, dans lequel m est une quantité constante qui n'a point de différence.

3°. La différence de myz est $mzdy + mydz$.

4°. Mettons à la place de z sa valeur dx, à la place de dy sa valeur $\overline{m-1}x^{m-2}dx$, & à la place de y sa valeur x^{m-1}, nous aurons $mzdy = mdx \times \overline{m-1}x^{m-2}dx = \overline{mm - m}x^{m-2}dx^2$, parce que $m \times \overline{m-1} = mm - m$, & que $dx \times dx = dx^2$; nous aurons encore $mydz = mx^{m-1}ddx$; donc $mzdy + mydz = \overline{mm - m}x^{m-2}dx^2 + mx^{m-1}ddx$.

Mais le premier membre de cette derniere équation est évidemment la différence du produit myz, donc le second membre de la même équation sera évidemment la différence de $mx^{m-1}dx$, ou la différence seconde de x^m, parce que (*num.* 2) $myz = mx^{m-1}dx$.

Corollaire. La différence seconde de x^m est une véritable formule pour quiconque prend garde que m vaut 2, lorsque la grandeur qu'on veut différencier, est élevée au quarré ; que m vaut 3, lorsqu'il s'agit du cube, &c. La différence seconde de x^3 sera donc $9 - 3x^{3-2}dx^2 + 3x^{3-1}ddx = 6xdx^2 + 3x^2ddx$; celle de x^2 sera $4 - 2x^{2-2}dx^2 + 2x^{2-1}ddx = 2x^0dx^2 + 2xddx = 2dx^2 + 2xddx$, parce que $x^0 = 1$, celle de x^4 sera $16 - 4x^{4-2}dx^2 + 4x^{4-1}ddx = 12x^2dx^2 + 4x^3ddx$, &c.

NOTE XLI.

VOICI comment on met en pratique les régles marquées dans l'*art.* 66, *pag.* 84. Pour trouver le point d'infléxion ou celui de rebroussement d'une courbe dont on a l'équation, 1°. L'on prend les différences premieres de l'équation proposée, & l'on met dans un membre dy seule, & les autres quantités dans le second membre. Si l'on a, *par exemple*, l'équation $axx = xxy + aay$, l'on fera $y = \frac{axx}{xx + aa}$, & par conséquent $dy = \frac{2ax^3dx + 2a^3xdx - 2ax^3dx}{\overline{xx + aa}^2} = \frac{2a^3xdx}{\overline{xx + aa}^2}$; & voilà ce qu'on nomme la seconde équation.

2°. Il faut différencier cette seconde équation, en regardant dx comme constante, & l'on aura

$$ddy = \frac{2a^3dx^2 \times \overline{xx+aa}^2 - 8a^3x^4dx^2 - 8a^5xxdx^2}{\overline{xx+aa}^4} =$$

$$\frac{2a^3dx^2 \times \overline{xx+aa}^2 - 8a^3xxdx^2 \times \overline{xx+aa}}{\overline{xx+aa}^4}.$$

3°. $ddy = o$; donc la fraction qui répond à ddy sera $= o$; mais dans cette fraction, ce n'est pas le dénominateur $\overline{xx+aa}^4$ qui est $= o$, car cette fraction seroit infinie; donc ce sera son numérateur qui sera $= o$; donc l'on aura $2a^3dx^2 \times \overline{xx+aa}^2 - 8a^3xxdx^2 \times \overline{xx+aa} = o$; donc $2a^3dx^2 \times \overline{xx+aa}^2 = 8a^3xxdx^2 \times \overline{xx+aa}$; donc, en divisant tout par $2a^3dx^2 \times \overline{xx+aa}$, l'on aura $xx+aa = 4xx$; donc $3xx = aa$; donc $xx = \frac{aa}{3}$; donc $x = \sqrt{\frac{aa}{3}}$; donc $x = a\sqrt{\frac{1}{3}}$. C'est ainsi qu'on opére, lorsque l'on fait $ddy = o$.

4°. Lorsque $ddy = o$ ne mene à rien, l'on fait alors $ddy = \infty$; & l'on calcule de la maniere qui suit. L'on vous donne, *par exemple*, l'équation $y - a = \overline{x-a}^{\frac{3}{5}}$. Vous aurez d'abord $dy = \frac{3}{5}\,\overline{x-a}^{\frac{3}{5}-1}dx = \frac{3}{5}\,\overline{x-a}^{-\frac{2}{5}}dx$. Vous différentierez cette seconde équation, & vous aurez, en prenant dx pour constante, $ddy = -\frac{2}{5} \times \frac{3}{5}\,\overline{x-a}^{-\frac{2}{5}-1}dx \times dx = -\frac{6}{25}\,\overline{x-a}^{-\frac{7}{5}}dx^2 = \frac{-6dx^2}{25\sqrt[5]{\overline{x-a}^7}}$, parce que

$\overline{x-a}^{-\frac{7}{5}}$ eſt évidemment égal à la fraction $\frac{1}{\overline{x-a}^{\frac{7}{5}}}$, & que cette fraction n'eſt pas différente de $\frac{1}{\sqrt[5]{\overline{x-a}^7}}$.

5°. En ſuppoſant $ddy = o$, l'on trouve $-6dx^2 = o$. Mais cela ne mene à rien, donc il faut ſuppoſer $ddy = \infty$.

6°. En ſuppoſant $ddy = \infty$, l'on aura le dénominateur de la fraction qui lui répond $= o$; l'on aura donc $25\sqrt[5]{\overline{x-a}^7} = o$; donc $x - a = o$; donc $x = a$.

7°. Lorſque $ddy = o$, l'on a le numérateur de la fraction qui lui répond $= o$; & lorſque $ddy = \infty$, l'on a le dénominateur de la même fraction $= o$. C'eſt-là une régle qu'il ne faut jamais oublier.

8°. Voici comment M. Varignon démontre que lorſque la différence de AL (*Fig.* 52. *Pl.* 3, & *Fig.* 53 *Pl.* 4) eſt $-\frac{yddy}{dy^2} = o$, elle eſt néceſſairement $ddy = o$. Dans la fraction $-\frac{yddy}{dy^2}$, ce n'eſt pas dy^2 qui eſt o, car cette fraction ſeroit infinie; ce n'eſt pas non plus $+y$ ou $-y$, car ce ſont des quantités réelles; c'eſt donc ddy. Le même Auteur paroit d'abord convenir avec M. le Marquis de l'Hôpital que, pour avoir le point d'infléxion, il faut faire $ddy = o$, & que pour avoir le point de rebrouſſement, il faut faire $ddy = \infty$; nous examinerons cette régle dans la Note 45e.

9°. Voici une occaſion où AL devient $x - \frac{ydx}{dy}$, au lieu d'être $\frac{ydx}{dy} - x$. La ſoutangente LM (*Fig.* 63. *Pl.* 4) eſt ſuivant la coutume $\frac{ydx}{dy}$; l'abſciſſe AM eſt x ; donc AL = AM — LM ſera par la même $x - \frac{ydx}{dy}$. Juſqu'à préſent M. le Marquis de l'Hôpital n'a parlé que des courbes dont les appliquées ſont paralléles entr'elles. La régle que je vais commenter regarde les courbes dont les appliquées partent d'un même point ; cette régle eſt $yddy = dx^2 + dy^2$.

10°. Pour comprendre cette régle, il faut d'abord bien ſe convaincre qu'à cauſe des angles infiniment petits HBT & MBm (*Fig.* 56. *Pl.* 4), BT peut être regardée comme paralléle à BH, & BM à Bm. L'on verra alors du premier coup d'œil que les triangles rectangles MRm, MBT, THO ſont équiangles. Il faut encore bien ſe convaincre que MR : TH : : TH : HO ; M. Crouzas nous en donne la démonſtration en cette maniere. A cauſe des triangles ſemblables mRM, HOT, l'on a mR : MR : : TH : HO, ou, $dy : dx : : \frac{dx^2}{dy}$: HO $= \frac{dx^3}{dy^2}$. Mais dans la proportion MR : TH : : TH : HO, l'on trouve HO $= \frac{dx^3}{dy^2}$; donc cette proportion n'a rien d'imaginaire. Enfin il faut ſe rappeller que lorſque Ot s'évanouit, comme il arrive au point d'infléxion ou de rebrouſſement, l'on a

$\frac{dx^3 + dxdy^2 - ydxddy}{dy^2} = o$; l'on a donc alors $\frac{ydxddy}{dy^2} = \frac{dx^3 + dxdy^2}{dy^2}$; donc $ydxddy = dx^3 + dxdy^2$ à cauſe du dénominateur commun ; donc, en diviſant tout par dx, l'on aura $yddy = dx^2 + dy^2$. Nous ferons remarquer dans les Notes ſuivantes l'uſage qu'il faut faire de cette équation.

NOTE XLII.

L'ARTICLE 67, *pag.* 89 nous prouve que M. le Marquis de l'Hôpital penſoit que dans les courbes dont les appliquées ſont paralléles, il falloit faire $ddy = o$, pour avoir le point d'infléxion ; & $ddy = \infty$, pour avoir le point de rebrouſſement. Ce même Auteur penſoit encore que pour les courbes dont les appliquées partent d'un même point, l'on a au point d'infléxion $dx^2 + dy^2 - yddy = o$, & au point de rebrouſſement $dx^2 + dy^2 - yddy = \infty$. Nous allons voir dans les Notes ſuivantes ce qu'il faut penſer de ces régles générales.

NOTE XLIII.

LES équations de l'*article* 68, *pag.* 90 ont été calculées dans la *Note* 41, *num.* 1. 2. 3.

NOTE XLIV.

LES équations de l'*article* 69, *pag.* 91 ont été calculées dans la *Note* 41, *num.* 4. 5. 6.

NOTE XLV.

POUR comprendre l'*article* 70, *pag.* 92, il faut d'abord relire les Notes 11 & 12. Cette lecture vous convaincra que la demi-circonférence ADB (*Fig.* 59. *Pl.* 4.) : à la demi-base BK : : la coupée AD : à l'appliquée DF, donc DF $= \frac{bu}{a}$. Mais DF $=$ EF $-$ ED $= y - z$; donc $y - z = \frac{bu}{a}$, donc $y = z + \frac{bu}{a}$.

Il faut ensuite former mentalement un triangle des *différences infiniment petites* de AE, de ED & de AD ; & l'on verra que la *différence* de AD deviendra la base d'un triangle rectangle qui aura pour ses deux côtés les *différences* de AE & de ED ; donc $du^2 = dx^2 + dz^2$; donc $du = \sqrt{dx^2 + dz^2}$. Ainsi à l'article 70, $du\,(\sqrt{dx^2 + dz^2})$ signifie $du = \sqrt{dx^2 + dz^2}$, & non pas $du \times \sqrt{dx^2 + dz^2}$.

Il faut enfin bien se convaincre que si $du = \sqrt{dx^2 + dz^2}$, l'on aura $du = \frac{cdx}{\sqrt{2cx - xx}}$. En voici le calcul : $dz^2 = \frac{c^2dx^2 - 2cxdx^2 + x^2dx^2}{2cx - xx}$; donc $dz^2 + dx^2 = \frac{c^2dx^2 - 2cxdx^2 + x^2dx^2}{2cx - xx} + dx^2$; & en mettant dx^2 sous le dénominateur $2cx - xx$, & ôtant ensuite les quantités qui se détruisent, l'on trouvera $dz^2 + dx^2 = \frac{c^2dx^2}{2cx - xx}$; donc

$\sqrt{dz^2 + dx^2} = \frac{cdx}{\sqrt{2cx - xx}}$; donc $du = \frac{cdx}{\sqrt{2cx - xx}}$.
Le reste de l'*article* 70 n'a besoin d'aucun éclaircissement particulier.

C'est ici que M. Varignon a remarqué qu'en faisant $ddy = \infty$, l'on avoit par là même $\overline{2cx - xx} \times \sqrt{2cx - xx} = 0$; donc $2cx \times \sqrt{2cx - xx} = xx \times \sqrt{2cx - xx}$; donc $2cx = xx$; donc $2c = x$. Il conclut de-là que $ddy = \infty$, n'est pas une marque sûre du point de rebroussement, puisque la roulette allongée n'est pas une courbe rebroussée. M. Varignon a raison, & M. de l'Hôpital n'a pas tort. Pour les accorder ensemble, il me paroit qu'il faut présenter ainsi la régle générale : *ddy* $= \infty$ *est une marque sûre du point de rebroussement, lorsque* ddy $= 0$ *n'a donné aucune valeur. Mais* ddy $= \infty$ *n'est pas une marque de rebroussement, lorsque* ddy $= 0$ *a donné quelque chose*. Or dans le cas présent $ddy = 0$ a donné $x = c + \frac{ac}{b}$; donc dans le cas présent $ddy = \infty$ peut donner une valeur de x, sans indiquer cependant aucun rebroussement dans la roulette allongée.

NOTE XLVI.

AVANT que de lire l'*article* 71, *pag.* 93, il faudra relire auparavant la Note 15 dans laquelle se trouve expliquée la nature de la conchoide. Vous chercherez ensuite la *différence* de $\frac{\overline{b + x}\sqrt{aa - xx}}{x}$; vous trouverez $\frac{-x^3dx - aabdx}{xx\sqrt{aa - xx}}$.

M. le Marquis de l'Hôpital la ſuppoſe telle, puiſqu'il lui aſſigne pour *différence ſeconde* $\frac{2a^4b - aax^3 - 3aabxx \times dx^2}{\overline{aax^3 - x^5} \times \sqrt{aa - xx}}$. C'eſt donc ou une inattention, ou une faute d'impreſſion qui a fait donner le ſigne + à un numérateur dont les deux termes doivent être affectés du ſigne —. Cette *ſeconde différence* vous donnera l'équation incompléte du troiſieme degré $x^3 + 3bxx - 2aab = o$. Pour mettre cette équation en état d'être calculée, vous ferez évanouir le ſecond terme, en ſuppoſant *par la régle ordinaire* $x = y - b$, & vous aurez pour votre équation transformée $y^3 - 3bby + 2b^3 - 2aab$. Vous ferez $-3bb = -p$, & $+2b^3 - 2aab = -q$, & vous aurez $y^3 - py - q = o$, équation du troiſieme degré qui ſe trouve calculée dans tous les Livres élémentaires d'algébre, & nommément dans *notre Guide des jeunes Mathématiciens dans l'étude des leçons élémentaires de M. l'Abbé de la Caille, pag. 32 & ſuivantes.*

La ſeconde maniere dont M. le Marquis de l'Hôpital réſout le même problême, apprend à un Commençant à ſe ſervir de la formule $yddy = dx^2 + dy^2$. Les calculs ne demandent qu'un peu d'attention, & l'on parvient comme naturellement à l'équation du 3e degré $2z^3 - 3bbz - abb = o$. Cette équation ſe change en celle-ci, $z^3 - \frac{3bb}{2}z - \frac{abb}{2} = o$. Vous faites $-\frac{3bb}{2} = -p$, & $-\frac{abb}{2} = -q$, & vous avez $z^3 - pz - q = o$,

équation du troiſieme degré que tout Commençant ſçait réſoudre.

NOTE XLVII.

L'ARTICLE 72, *pag.* 95 a beſoin, pour être compris, des remarques ſuivantes.

1°. $y = b + x\sqrt{\frac{a-x}{x}}$; donc $y = b \times \sqrt{\frac{a-x}{x}} + x \times \sqrt{\frac{a-x}{x}}$. Mais $x \times \sqrt{\frac{a-x}{x}} = \sqrt{\frac{axx - x^3}{x}} = \sqrt{ax - xx}$; donc $y = b\sqrt{\frac{a-x}{x}} + \sqrt{ax - xx}$.

2°. Pour trouver facilement la *différence* de cette derniere valeur de y, ſouvenez-vous d'abord que $b\sqrt{\frac{a-x}{x}} = \sqrt{\frac{abb - bbx}{\sqrt{x}}}$, parce que le dénominateur x eſt auſſi bien affecté du ſigne radical, que le numérateur $a - x$. Souvenez-vous enſuite que la différence de $\sqrt{\frac{abb - bbx}{\sqrt{x}}}$ eſt $\frac{-bbdx \times \sqrt{x}}{2\sqrt{abb - bbx}}$ $\frac{-dx \times \sqrt{abb - bbx}}{2\sqrt{x}}$, le tout diviſé par x. Réduiſez ces deux fractions à un même dénominateur, & ôtez les quantités qui ſe détruiſent, vous aurez $\frac{-2abbdx}{2\sqrt{x} \times 2\sqrt{abb - bbx}}$, le tout diviſé par x.

Vous aurez donc $\frac{-2abbdx}{4x\sqrt{abbx - bbxx}}$. Mais cette der-

niere fraction est égale à $\frac{-abbdx}{2bx\sqrt{ax-xx}} = \frac{-abdx}{2x\sqrt{ax-xx}}$;

donc la différence de $b\sqrt{\frac{a-x}{x}}$ est $\frac{-abdx}{2x\sqrt{ax-xx}}$.

3°. Ajoutez à cette *différence* celle de $\sqrt{ax-xx}$, c'est-à-dire $\frac{adx - 2xdx}{2\sqrt{ax-xx}} = \frac{axdx - 2xxdx}{2x\sqrt{ax-xx}}$; & vous trouverez, aux signes près, la même chose que M. le Marquis de l'Hôpital, c'est-à-dire, $\frac{axdx - 2xxdx - abdx}{2x\sqrt{ax-xx}}$. Ce n'est qu'en conservant ces derniers signes, que vous parviendrez à la *seconde différence*, telle qu'elle est marquée dans *l'Analyse des Infiniment Petits*. Aussi ne voyons-nous pas pourquoi M. le Marquis de l'Hôpital n'a pas conservé les signes qui se présentoient naturellement. C'est ici le lieu de relever une faute qui s'est glissée dans les deux éditions, & qu'il est difficile de regarder comme une faute d'impression. M. le Marquis de l'Hôpital divisa d'abord $\overline{3aab - aax - 4abx} \times dx^2$ par $\overline{4ax - 4x^3} \times \sqrt{ax-x^2}$; & il avertit à la fin de son Ouvrage qu'il le falloit diviser par $4ax - 4x^2$. Il ne faut faire ni l'un ni l'autre. Le vrai diviseur est $4axx - 4x^3$, parce que le quarré de $2x\sqrt{ax-xx}$ est évidemment $4ax^3 - 4x^4$, & non pas $4axx - 4x^3$, comme l'assure M. Crouzas. Mais la faute que nous relevons ici, ne peut conduire dans aucune erreur, puisque c'est le numérateur de la fraction que l'on fait $= o$. Nous aurions pu la corriger dans cette

troisieme édition. Mais nous nous sommes fait une loi inviolable de ne rien changer au texte de M. le Marquis de l'Hôpital.

NOTE XLVIII.

L'ARTICLE 73, *pag.* 97 est terminé par une équation du cinquieme degré. L'on n'a qu'à exprimer en chiffres les valeurs de a & de b ; & alors cette équation ne sera pas bien difficile à résoudre. Si l'on suppose, *par exemple*, $a = 2$, & $b = 2$, l'équation proposée se changera en celle-ci, $y^5 - 6y^4 + 12y^3 - 8y^2 + 12y - 16 = o$; & cette équation se résoudra par la seconde des méthodes que donne M. l'Abbé de le Caille dans ses Elémens de Mathématique, *pag.* 89 & 90, parce que dans cette supposition y est égal à un nombre entier joint à une fraction.

NOTE XLIX.

L'ARTICLE 74, *pag.* 98 a besoin des trois éclaircissemens suivants.

1°. $FB = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$; en voici le calcul. A cause du triangle rectangle FEB, *Fig.* 64. *Pl.* 4, l'on a $FB^2 = EF^2 + EB^2$; donc $FB^2 = yy + \frac{yydx^2}{dy^2} = \frac{yydy^2 + yydx^2}{dy^2} = \frac{yy \times \overline{dx^2 + dy^2}}{dy^2}$; donc

$$FB = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}.$$

2°. A cause de l'équation à la courbe, l'on aura

$\frac{mydy}{nx} = \frac{nxdy - nydx}{my}$. En effet, l'équation à la courbe donne $m : n :: xdy - ydx : y\sqrt{dx^2 + dy^2}$; donc $my\sqrt{dx^2 + dy^2} = nxdy - nydx$; donc

$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{nxdy - nydx}{my}$. Mais $\sqrt{dx^2 + dy^2}$

$= \frac{mydy}{nx}$; donc $\frac{mydy}{nx} = \frac{nxdy - nydx}{my}$.

3°. Pour trouver $y\sqrt{mm - nn} = nx$, voici les opérations qu'il faut faire. 1°. Divisez par dy l'équation $\frac{dy\sqrt{mmyy - nnxx}}{nx} = \frac{nnxxdy - mmyydy}{nnxy}$,

vous aurez $\frac{\sqrt{mmyy - nnxx}}{nx} = \frac{nnxx - mmyy}{nnxy}$.

2°. Multipliez cette derniere équation par nx, & ôtez les quantités qui se détruisent, vous aurez $\sqrt{mmyy - nnxx} = \frac{nnxx - mmyy}{ny}$; donc

$ny\sqrt{mmyy - nnxx} = nnxx - mmyy$; donc $\sqrt{m^2n^2y^4 - n^4x^2y^2} = nnxx - mmyy$; donc $- n^4x^2y^2 + m^2n^2y^4 = \overline{nnxx - mmyy}^2$; donc, en divisant tout par, $n^2x^2 - m^2y^2$, l'on aura $- n^2y^2 = n^2x^2 - m^2y^2$; donc $y^2 \times \overline{mm - nn} = nnxx$; donc $y\sqrt{mm - nn} = nx$.

Remarque. Ceux qui nous ont suivi jusqu'à présent, sont en état de lire sans guide, à quelques points près, les 6 dernieres Sections de l'Analyse des Infiniment Petits. Ce sont ces quelques points que l'on trouvera éclaircis dans les 6 Notes suivantes.

NOTE L.

LA Section 5e, contient 34 articles. Ceux qui se rappellent nos notes 5, 7, 11, 12, 23, 24 & 40, ne peuvent être arrêtés que dans la lecture des articles 77, 79, 84, 86, 87, 89, 90, 93, 101, 103, 105, & 109. Voici l'explication de ce qu'il y a de plus difficile dans ces 12 articles.

1°. L'on assure sur la fin de l'article 77 que $z = \frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 + dy^2 - yddy}$. Pour trouver cette valeur, il faut manier suivant les régles ordinaires l'équation $z = \frac{dx^2 + dy^2}{-dyddy} \times \frac{ydy - zdy}{y}$.

2°. Pour trouver, au commencement de l'article 79, la valeur de RG (*Fig.* 67, *Pl.* 4), l'on dira, $MR : mR :: mR : RG$.

3°. La valeur de PT (*Fig.* 72. *Pl.* 4) est en général $\frac{ydx}{dy}$. Cette valeur devient $2x$ dans la parabole dont il s'agit à l'article 84, parce que dans cette parabole l'on a $x = \frac{yy}{a}$, & $dx = \frac{2ydy}{a}$. Dans cette même parabole l'on a $PQ = \frac{1}{2}a$, parce qu'on a démontré (article 79) que $PQ = \frac{ydy}{dx}$.

4°. En lisant l'article 86, l'on pourra demander comment se sont trouvées les valeurs de EC, de MS & de TQ (*Fig.* 74, *Pl.* 4). L'on aura la valeur de EC, en imaginant, suivant la coutume, un

un triangle infiniment petit dont les deux côtés ſoient dx, dy, & qui ſoit équiangle au triangle MEC. L'on dira alors $dx : dy :: ME : EC$.

Pour avoir la valeur de MS, vous direz, à cauſe de l'angle droit MTS, $MP : PT :: PT : PS$.

Enfin pour avoir la valeur de TQ, vous direz, à cauſe de l'angle droit TMQ, $PT : PM :: PM : PQ$. Il n'eſt pas néceſſaire d'avertir que $PM = y$, & $PT = \frac{ydx}{dy}$.

5°. L'article 87 auroit beſoin d'un éclairciſſement qui eut rapport à la *différence ſeconde* de y^m, ſi cette *différence ſeconde* n'eut pas été calculée ſur la fin de la 40e. note. Il y a encore ſur la fin de cet article une phraſe dont le ſens ne ſe préſente pas tout de ſuite. La voici. *Ou* m *eſt moindre que* 2, *& alors l'expoſant de* y *étant poſitif*, *elle ſe trouvera dans le numérateur*, &c. Pour que cette phraſe & quelques autres ſuivantes ayent la clarté requiſe dans les ouvrages de Mathématiques, il faut dire: *l'appliquée* y *ſe trouvera dans le numérateur*, &c.

6°. L'ellipſe dont il s'agit a l'article 89, a évidemment pour petit axe $\sqrt{ab}$, parce que ſon grand axe eſt a, & le paramétre de ce grand axe eſt b. Pour avoir le paramétre de $\sqrt{ab}$, il faut dire, $\sqrt{ab} : a :: a$: au paramétre du petit axe; donc le paramétre du petit axe eſt $\frac{aa}{\sqrt{ab}} = \frac{aa\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}\times\sqrt{ab}} = \frac{aa\sqrt{ab}}{ab} = \frac{a\sqrt{ab}}{b}$.

7°. Pour trouver, à l'article 90, la valeur de EC, vous direz d'abord PT (a) : PM (y) : : PM (y) : PQ $= \frac{yy}{a}$. Vous direz enſuite PM : PQ : : ME : EC.

8°. L'article 93 a beſoin des éclairciſſemens ſuivans. 1°. Pour trouver $du = \frac{adx}{\sqrt{2ax - xx}}$, il faut imaginer proche du point E, *Fig.* 83. *Pl.* 5, un triangle rectangle infiniment petit, ſemblable au triangle rectangle EPK, dont le côté dx, *différence de* AP, & la baſe du, *différence de l'arc* AE, ſoient homologues à EP & EK. L'on dira alors EP ($\sqrt{2ax - xx}$: EK (a) : : dx : du. 2°. Pour trouver $dy = dx \frac{\sqrt{2a - x}}{\sqrt{x}}$, l'on a diviſé par $\sqrt{2a - x}$ le numérateur & le dénominateur de la fraction $\frac{2adx - xdx}{\sqrt{2ax - xx}}$. 3°. On aura la valeur de BE en faiſant $BE^2 = AB^2 - AE^2$. 4°. C'eſt au point A qu'on a $x = o$; & c'eſt au point B qu'on trouve $x = 2a$.

9°. Pour comprendre la derniere conſéquence de l'article 101, il faut ſe rappeller que la portion de la roulette AM n'eſt que la ſomme des arcs infiniment petits Mm, & que la corde AE n'eſt que la ſomme des EF.

10°. On avance, à l'article 103, que l'eſpace RGBQ (*Fig.* 87, *Pl.* 5) eſt égal à l'eſpace MGBE. L'on a raiſon, puiſqu'on a démontré dans la figure 84 de la même planche que l'arc MR = l'arc EQ,

par la même que l'angle MOK = l'angle EOK.

Pour trouver, à la fin du même article, $zz = 2aa + 2ab + bb$, il faut que l'arc MEQ, (*Fig.* 87, *Pl.* 5) coupe en 2 parties égales le demi-cercle AEB au point E. Alors l'angle EKO sera droit ; & en tirant le rayon $OE = OQ = z$, l'on aura $OE^2 = EK^2 + OK^2$; donc $zz = aa + aa + 2ab + bb$; donc $zz = 2aa + 2ab + bb$.

11°. Pour trouver, à l'article 105, $x = \frac{3}{2}a$, il faut se rappeller que xx étant nul vis-à-vis $2bx$, & $2aa$ vis-à-vis $3ab$, il reste $2bx = 3ab$, & par conséquent $x = \frac{3}{2}a$. Il faut encore se rappeller qu'en faisant $BP = \frac{3}{4}AB$, l'on fait par là même $x = \frac{3}{2}a$, parce que $BP = x$, & $AB = 2a$.

12°. Pour peu qu'on réfléchisse sur la figure 91 citée à l'article 109, l'on verra que la courbe DE est formée par le développement de la convexité AD ; la courbe EF par le développement de la convexité AB ; & la courbe DG par le développement de la convexité DC.

NOTE LI.

Il y a dans la sixieme section quelques articles qui nous ont paru mériter quelques éclaircissements. Ce sont les articles 110, 113, 118, 119, 120, 121, 123 & 125.

1°. L'angle de réfléxion F*m*D (*Fig.* 94. *Pl.* 5, *art.* 110) est égal à l'angle d'incidence B*m*M, & par conséquent à l'angle R*m*M.

2°. L'*article* 113 est un des plus importants du Traité des Infiniment Petits. Il sert à démontrer

que l'image d'un objet vû par le moyen d'un miroir, ne paroit pas toujours au point de concours de la cathéte d'incidence & du rayon réfléchi; cela n'eſt exactement vrai que pour les miroirs plans; pour les autres il ſouffre bien des exceptions. Soit, *par exemple*, le miroir concave AMD, (*Fig.* 97, *Pl.* 5). Soient les deux rayons de lumiere infiniment près l'un de l'autre BM, Bm envoyés par le point B ſur la concavité de ce miroir, & réunis au point F après la réfléxion. Il eſt évident que ces deux rayons donneront après leur réfléxion, l'image de l'objet B au point F; s'ils la donnoient ailleurs, *par exemple*, à leur point de concours avec la cathéte d'incidence, l'on auroit deux images de l'objet B; donc &c. Ce que l'on peut auancer en général pour toute ſorte de miroirs, c'eſt que le lieu de l'image eſt toujours au point F où deux rayons incidents infiniment proches l'un de l'autre BM, Bm viennent ſe couper après la réfléxion.

3°. L'on aſſure (*art.* 118) que lorſque MF eſt infini, l'on a ME $=$ 2MB (*Fig.* 98 *Pl.* 5) ou $a = 2y$. L'on a raiſon. La valeur de MF eſt (*art.* 113) $= \frac{ay}{2y-a}$. Lorſque MF eſt infini, l'on a MF $= \frac{ay}{o}$; donc dans ce cas l'on a $2y - a = o$; donc $2y = a$. Pour trouver la proportion indiquée à la fin de ce même article, il faut dire, la moitié du grand axe : au rayon incident : : le rayon réfléchi : ME, Or par là même que les rayons

incident & réfléchi ſont donnés, le grand axe l'eſt auſſi. Car dans la figure 99 de la planche 5, l'on a $AD = BM + MF$; & dans la figure 100 de la planche 6, l'on a $Aa = MF - MB$, parce que les rayons incidens & réfléchi ſont tirés des deux foyers à un même point de la courbe elliptique ou hyperbolique.

4°. L'article 119 a beſoin des éclairciſſemens ſuivans. L'on demande 1°. Pourquoi $MF = \frac{1}{2}MG$, lorſque les rayons incidens PM ſont perpendiculaires ſur l'axe AP, (*Fig.* 101 *Pl.* 6.). L'on répond que lorſque les rayons incidens PM ſont perpendiculaires ſur l'axe AP, ils ſont par là même paralléles entr'eux; & puiſqu'àlors l'on a eu (*art.* 113) $MF = \frac{1}{2}MG$; l'on doit avoir (*art.* 119), en faiſant la même ſuppoſition, $MF = \frac{1}{2}MG$.

L'on demande 2°. Si la conſtruction abrégée dont parle M. le Marquis de l'Hôpital, eſt préférable à celle qu'il donne d'abord. L'on peut répondre hardiment que non. Cette conſtruction n'eſt bonne que pour ceux qui voudroient s'épargner la peine de chercher le rayon de la développée de la parabole. Ce rayon ſe trouve très-facilement par l'article 84.

L'on demande 3°. Pourquoi, lorſque le rayon réfléchi eſt paralléle à l'axe, l'on a $MP = PQ$ (*Fig.* 101. *Pl.* 6.). Pour répondre à cette queſtion, l'on n'a qu'à démontrer que dans la même figure l'on a $ML = LQ$. En effet l'angle $QMA =$ l'angle QMD, puiſque ce ſont les deux angles droits formés par le rayon MC de la développée avec la

courbe AMD. De plus, l'angle d'incidence AML est égal à l'angle de réfléxion NMD ; donc l'angle restant LMQ est égal à l'angle restant QMN. Mais à cause des paralléles MN, AO, l'on a LQM = QMN ; donc LMQ = LQM ; donc les angles sur la base MQ sont égaux ; donc ML = LQ. Pour trouver $dy = dx$, il faut imaginer au point M un triangle infiniment petit, semblable au triangle isoscéle MLQ dont les 2 côtés dy, dx soient homologues aux deux côtés ML, LQ.

L'on demande 4°. comment $\sqrt{tt - yy}$ divisé par $t + y$ donne $\frac{\sqrt{t - y}}{\sqrt{t + y}}$. L'on répond que $\frac{\sqrt{tt - yy}}{t + y} = \frac{\sqrt{\overline{t - y} \times \overline{t + y}}}{\sqrt{\overline{t + y} \times \overline{t + y}}} = \frac{\sqrt{t - y}}{\sqrt{t + y}}$. Il n'est pas nécessaire de faire remarquer que l'on trouve $dy^2 - 2yddy = dx^2$, en maniant suivant les régles ordinaires l'équation $\frac{ydx^2 + ydy^2}{dx^2 - dy^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{-2ddy}$. Il n'est pas plus nécessaire de faire remarquer que l'équation $zz = \frac{4}{27} u^3 - \frac{2}{3} uu + \frac{3}{4} u$ que l'on trouve sur la fin de l'article 119, n'est pas différente de l'équation $azz = \frac{4}{27} u^3 - \frac{2}{3} auu + \frac{3}{4} aau$, parce que $a = 1$. Ce n'est que par la loi des homogénes qui exige que tous les termes de l'équation ayent les mêmes dimensions, que l'on a fait entrer tantôt a, & tantôt aa dans l'équation primitive.

5°. Pour comprendre l'article 120, on fera attention à ce qui suit. 1°. Une perpendiculaire tirée du point C sur le rayon MF prolongé (*Fig.*

102, *Pl.* 6) couperoit ce rayon réfléchi dans un point où il feroit égal à la ligne appellée a à l'article 113, comme il eſt aiſé de s'en convaincre en examinant la figure 97 de la planche 5 ; donc une perpendiculaire tirée du milieu de MC ſur le rayon réfléchi MF rencontrera ce rayon dans un point où il ſera égal à $\frac{1}{2}a$, c'eſt-à-dire, le rencontrera au point F ; car $MF = \frac{1}{2}a$, lorſque les rayons incidens PM ſont perpendiculaires ſur l'axe, comme nous venons de le remarquer au *num.* précédent de cette note. 2°. Si $MF = \frac{1}{2}a$, l'on aura $MF = \frac{1}{2}MP$, parce que la ligne MP de la figure 102 repréſente la ligne ME ou la ligne a de la figure 97. 3°. Pour ſe convaincre que la cauſtique AF eſt triple de MF, il faut ſe rappeller que AF (*art.* 110) $= PM + MF$. Or $PM = 2MF$; donc $AF = 3MF$. 4°. Si l'angle ACM ou PCM eſt de 45°, l'angle d'incidence PMC ſera de 45° ; donc l'angle de réfléxion CMF ſera de 45°. ; donc l'angle total PMF ſera droit, & par conſéquent MF ſera parallèle à AC.

6°. On peut demander en liſant l'article 121, pourquoi $KD = \frac{1}{3}AD$ (*Fig.* 103, *Pl.* 6). Pour répondre à cette queſtion, on fera remarquer que lorſque AD eſt le rayon incident, alors DK eſt le rayon réfléchi. Or de même que MF eſt $\frac{1}{3}$ AM, de même DK eſt $\frac{1}{3}$ AD. On peut encore demander pourquoi MF eſt parallèle à AD, lorſque AM eſt égal à AC. L'on répondra que lorſque $AM = AC$, alors le triangle ACM eſt équilateral ; donc chaun de ſes angles vaut 60 de-

grés ; donc l'angle de réfléxion CMF néceſſairement égal à l'angle d'incidence AMC, vaudra 60 degrés ; donc les angles alternes ACM, CMF ſeront égaux ; donc les lignes AD, MF ſeront paralléles.

7°. L'article 122 n'a beſoin d'aucun commentaire. Il n'en eſt pas ainſi de l'article 123. En le liſant, on ſe ſouviendra d'abord que MG, (*Fig.* 105. *Pl.* 6) eſt une partie du rayon de la développée, laquelle partie eſt paralléle & égale à NB, & que pour trouver MF = MQ = PN, il faut imaginer une perpendiculaire tirée du point G au point F, pour avoir le triangle rectangle MFG égal au triangle rectangle MQG, à cauſe du côté commun MG & de l'angle de réfléxion GMF égal à l'angle d'incidence GMP. On ſe ſouviendra enſuite que ſi le rayon incident PM partoit du centre C du cercle ANB, l'on auroit l'angle d'incidence PMG de 45 degrés, à cauſe du triangle rectangle iſoſcéle BPN. On ſe ſouviendra encore que, par la nature de la roulette, l'on a LI = AI, & que pour trouver $du = \frac{adx}{y}$, il faut imaginer prés du point I un triangle rectangle infiniment petit, ſemblable au triangle rectangle CHI, dont la *différence* de AI & la *différence* de IH ſeront en proportion avec CI & IH. L'on aura donc $du : dx :: a : y$; donc $du = \frac{adx}{y}$. L'on ſe ſouviendra enfin que la nature du cercle donne AH : IH :: IH : HB, ou, $yy = 2ax - xx$; donc $2ydy$

$= 2adx - 2xdx$; donc $-2ydy = 2xdx - 2adx$. Les defauts de proportion qui ſe trouvent dans la figure 105, ſe corrigent d'eux-mêmes, & ne ſçauroient induire dans aucune erreur.

8°. L'article 124 ſe préſente de lui-même. Pour comprendre facilement l'article 125, il faut relire l'article 100 dans lequel $GC = \frac{b}{2a+b} MG$. A l'article 125 l'on a $b = a$ à cauſe de l'égalité des cercles mobile & immobile ; l'on aura donc $GC = \frac{b}{3b} MG$, ou $GC = \frac{1}{3} MG$ (*Fig.* 106. *Pl.* 6). Les autres articles de la 6e. ſection ne ſont ni aſſez intéreſſants, ni aſſez difficiles pour mériter un commentaire.

NOTE LII.

DANS la ſection 7e. M. le Marquis de l'Hôpital ſe ſert du calcul des *différences* pour trouver les cauſtiques par réfraction. Il ſuppoſe que celui qui en entreprend la lecture, eſt au fait de ce qui arrive à la lumiere, lorſqu'elle traverſe les verres convexes & concaves. Nous le ſuppoſerons auſſi dans cette note. Ce qui nous engage à ſupprimer une pareille diſſertation, c'eſt que nous avons déja traité cette matiere aux articles de notre Dictionnaire de Phyſique qui commencent par les mots *Réfraction*, *Dioptrique*, *Lunette*, *Microſcope & Teleſcope*. Cette note ne roulera donc que ſur les articles 135, 136, 137, 139, 141, 142 & 144 ; ce ſont les ſeuls qui ayent beſoin de quelques éclairciſſements.

1°. Pour comprendre la fin de l'article 135, vous remarquerez ce qui ſuit. 1°. m eſt infinie par rapport à n, lorſque $n = o$. 2°. L'on a $n = o$, lorſqu'il n'y a point de réfraction, c'eſt-à-dire, lorſque le rayon incident B M (*Fig.* 111, *Pl.* 6) eſt perpendiculaire à la courbe AMD. 3°. Lorſque le rayon incident B M eſt perpendiculaire à la courbe AMD, il doit, après avoir traverſé cette courbe, ſe confondre avec M C, perpendiculaire à A M D. 4°. Lorſque m eſt infinie par rapport à n, l'on a M F $= b$, parce que la formule M F $= \frac{bbmy}{bmy - any - aan}$ devient évidemment M F $= \frac{bbmy}{bmy} = b$.

2°. M. le Marquis de l'Hôpital ſuppoſe que celui qui lira l'article 136, a préſent à l'eſprit ce qui arrive à un rayon de lumiere qui paſſe obliquement, tantôt d'un milieu plus rare dans un milieu plus denſe, tantôt d'un milieu plus denſe dans un milieu plus rare. Dans le premier cas m eſt plus grand que n; dans le ſecond c'eſt n qui eſt plus grand que m.

3°. En liſant l'article 137, vous-vous ſouviendrez de ce qui ſuit. 1°. Lorſque les rayons incidens B M (y) ſont paralléles entr'eux, alors ils ſont infinis; donc la formule MF $= \frac{bmy}{my - ny \mp bn}$ devient, à cauſe du terme infiniment petit $\mp bn$, MF $= \frac{bmy}{my - ny} = \frac{bm}{m - n}$. 2°. Lorſque les droi-

tes a & b sont infinies, alors les termes bmy, any sont nuls par rapport aux termes aan, $bbmy$, parce que ceux-ci sont des infinis du second genre, & ceux-là ne sont que des infinis du premier genre.

4°. L'article 139 demande, pour être compris, les remarques suivantes. 1°. Dans la figure 115 DN est par rapport à BD ce que dans la figure 111 MG (*b*) est par rapport à BM. 2°. La caustique entiere $HFN = AH - DN - \frac{2}{3}AC$. Mais $AH = 3AC$, donc $HFN = 3AC - \frac{2}{3}AC - DN = \frac{9}{3}AC - \frac{2}{3}AC - DN = \frac{7}{3}AC - DN$. Mais $DN^2 = CD^2 - CN^2 = CD^2 - \frac{4}{9}CD^2$, puisque par hypothése $CN = \frac{2}{3}CD$; donc $DN^2 = AC^2 - \frac{4}{9}AC^2$; donc $DN^2 = \frac{5}{9}AC^2$; donc $DN = \sqrt{\frac{5}{9}AC^2}$; donc $DN = \frac{1}{3}AC\sqrt{5}$; donc si l'on a $HFN = \frac{7}{3}AC - DN$, l'on aura par là même $HFN = \frac{7}{3}AC - \frac{1}{3}AC\sqrt{5} = \frac{7-\sqrt{5}}{3}AC$. Tout ce calcul se rapporte à la caustique HFN de la figure 115. 3°. Pour ce qui regarde la caustique HFN de la figure 116, vous trouverez $HFN = \frac{7-\sqrt{5}}{2}AC$, en vous rappellant que $NK = \frac{2}{3}AC$, & que la caustique $HFN = 2AC + \frac{3}{2}AK$. En effet, $CK^2 = CN^2 - NK^2 = AC^2 - NK^2 = AC^2 - \frac{4}{9}AC^2 = \frac{5}{9}AC^2$; donc $CK = \sqrt{\frac{5}{9}AC^2}$; donc $CK = \frac{1}{3}AC\sqrt{5}$. Mais $AK = AC - CK$, donc $AK = AC - \frac{1}{3}AC\sqrt{5}$, donc $\frac{3}{2}AK = \frac{3}{2}AC - \frac{3}{6}AC\sqrt{5} = \frac{3}{2}AC - \frac{1}{2}AC\sqrt{5}$. Mais la caustique $HFN = 2CA + \frac{3}{2}AK$; donc $HFN = \frac{4}{2}AC + \frac{3}{2}AC - \frac{1}{2}AC\sqrt{5} = \frac{7}{2}AC - \frac{1}{2}AC\sqrt{5} = \frac{7-\sqrt{5}}{2}AC$.

5°. L'article 141 suppose que l'on a présent à l'esprit l'article 132. Il suit de ce dernier article

que BM — BA : LM : : m : n. Mais l'on a dans la figure 118 PM = BM — BA, & AE = LM; l'on aura donc PM : AE : : m : n.

6°. A la fin de l'article 142, il est parlé des ovales de Descartes. Cette matiere est traitée dans la section seconde du livre 2 de sa Géométrie. Voyez-en le Commentaire qu'en a fait le P. Rabuel Jésuite, *pag.* 340 *& suivantes.*

7°. Pour comprendre la bonté de l'équation $NF + FH - \frac{n}{m} NC = HD - \frac{n}{m} DC$ de l'article 144, il faut la transformer en celle-ci, $FH = HD - NF + \frac{n}{m} NC - \frac{n}{m} DC$, & se rappeller ensuite l'équation de l'article 132, où l'on lit $FH = AH - MF + \frac{n}{m} BM - \frac{n}{m} BA$. Il faut encore avoir en même tems sous les yeux les figures 121 & 112, parce que HD est pour la figure 121 ce qu'est AH pour la figure 112. Il en est de même de NF, $\frac{n}{m} NC$, $\frac{n}{m} DC$; ils sont dans la figure 121 ce que sont dans la figure 112 MF, $\frac{n}{m} BM$, $\frac{n}{m} BA$.

NOTE LIII.

LA Section 8e. contient 11 articles qu'il est nécessaire de commenter ; ce sont les articles 147, 148, 151, 152, 155, 156, 158, 159, 160, 161 & 162.

1°. L'article 147 est très-difficile ; en voici le

commentaire. 1°. L'équation $xx = 4ay - 4yy$ eſt un lieu au petit axe AB de la demi-ellipſe AMB, *Fig.* 122. *Pl.* 7. Ce petit axe a pour paramétre $4a$, parce que le petit axe : au grand axe : : le grand axe : au paramétre du petit axe. L'équation a ce même petit axe eſt la ſuivante, $AP^2 : AQ \times BQ$: : le paramétre du petit axe : au petit axe ; donc $xx : ay - yy :: 4a : a$; ce qui donne évidemment $xx = 4ay - 4yy$. Reliſez la note 5e. 2°. Pour trouver $AK = \frac{ax}{y}$, il faut d'abord tirer de l'équation $xx = 4ay - 4yy$ la valeur de $2xx = 8ay - 8yy$; il faut enſuite conclure que $dy = \frac{xdx}{2a - 4y}$ par là même que $xdx = 2ady - 4ydy$. Cela fait vous introduirez ces nouvelles valeurs dans l'équation $AK = \frac{2xxdy - 2xydx}{xdy - 2ydx}$, & vous trouverez après un très-grand nombre d'équations & de transformations $AK = \frac{ax}{y}$. 3°. La parabole qui a pour ſommet le point A eſt aſymptotique de celle qui paſſe par tous les points C, parce que toutes ces paraboles ont, avec le même paramétre 4AB, differents ſommets ſur le même axe ; donc leurs différentes branches s'approcheront continuellement, ſans pouvoir jamais ſe toucher.

2°. L'article 148 ne demande que cette ſeule remarque : l'on trouvera PQ (*Fig.* 123. *Pl.* 7.) $= \frac{ydy}{dx}$, en imaginant au point M un triangle infini-

ment petit, ſemblable au triangle MPQ dont les deux côtés dx, dy ſeront homologues à PM, PQ. Il n'eſt pas néceſſaire d'avertir que dans ce même article l'on a $PC^2 = KC^2 + PK^2$ par la 47e. propoſition du livre 1 des élémens d'Euclide, & non pas par la propriété du cercle.

3°. M. le Marquis de l'Hôpital a ſuppoſé dans ſon article 151 que l'on avoit préſent à l'eſprit l'article 11.

4°. A l'article 152 l'on a AT (*Fig.* 125. *Pl.* 7) $= \frac{aa}{x}$, parce que l'on a évidemment AP : AM : : AM : AT, ou $x : a :: a : AT = \frac{aa}{x}$. Mais (*art.* 150) AT : AP : : AP : AK, ou $\frac{aa}{x} : x :: x : AK$; donc $AK = \frac{x^3}{aa}$. L'équation que l'on trouve à la fin de cet article prouve que la courbe BCD eſt une courbe du troiſieme genre. M. Varignon eſt parvenu d'une maniere plus ſimple à une équation qui prouve la même vérité. Voici comment il raiſonne : Puiſque $QC = \frac{xx}{a}$, l'on aura $CP = a - \frac{xx}{a}$. Ainſi QP (a) : QA (y) : : CP $(a - \frac{xx}{a})$: CK (z); donc $az = \frac{aay - xxy}{a}$; donc $aaz = aay - xxy$ donc $a^4z^2 = a^4y^2 - 2a^2x^2y^2 + x^4y^2$. Mais le cercle BMD donne $AP \times PT = PM^2$, ou, $a^2 - x^2 = y^2$; donc $a^4z^2 = a^6 - 3a^4x^2 + 3a^2x^4 - x^6$; donc $\sqrt[3]{a^4z^2} = a^2 - x^2$. Mais $u = \frac{x^3}{aa}$, donc x^3

$= aau$, donc $x = \sqrt[3]{aau}$; donc $xx = \sqrt[3]{a^4uu}$; donc $\sqrt[3]{a^4z^2} = a^2 - \sqrt[3]{a^4uu}$; donc $a\sqrt[3]{az^2} = aa - a\sqrt[3]{au^2}$; donc $\sqrt[3]{az^2} = a - \sqrt[3]{au^2}$; donc l'équation de la courbe BCD prouve que c'eſt ici une courbe du troiſieme genre.

5°. La propoſition énoncée par l'article 155 eſt démontrée dans tous les Traités de Méchanique, & nommément dans celui de M. l'Abbé de la Caille, *art.* 364, *pag.* 113.

6°. Le mot *ſeſquialtere* pourroit embarraſſer un Commençant. Etre ſeſquialtere, c'eſt avoir la moitié en ſus; *a* ſera ſeſquialtere de *b*, ſi l'on peut dire, $a = \frac{3}{2} b$. Si la portion ND de la courbe DNF (*Fig.* 125. *Pl.* 7.) étant multipliée par le rayon AB eſt ſeſquialtere du ſegment circulaire DMP, il s'enſuit que la courbe entiere DNF eſt égale aux trois quarts de BMD, quatrieme partie de la circonférence du cercle. En voici la démonſtration, elle eſt de M. Crouzas. DNF × AB eſt trois moitié de l'eſpace BADMB. Mais l'eſpace $BADMB = AB \times \frac{DMB}{2}$, donc $DNF \times AB = \frac{3}{2} AB \times \frac{DMB}{2} = \frac{3}{4} ABDMB$; donc $DNF = \frac{3}{4} DMB$. Ces deux remarques ont été néceſſaires pour l'intelligence de l'article 156.

7°. L'article 158 préſente deux points qu'il faut néceſſairement expliquer. 1°. Pour ſuivre M. le Marquis de l'Hôpital, lorſqu'il parle de la

différence de $\frac{uy - xy}{\sqrt{aa - xx}} - y$, il faut ſe rappeller qu'àprès avoir cherché cette différence par les régles ordinaires, il parvient à une fraction dont il fait le numérateur $= o$. 2°. Après avoir trouvé $PK = \frac{m^3 + mmx}{aa}$, il faudra chercher MC (*Fig.* 127. *Pl.* 7) $= \frac{mm + mx}{a}$. Pour le trouver, il faudra ſe ſouvenir que $NK = PK - PN = \frac{m^3 + mmx}{aa} - m = \frac{m^3 + mmx - aam}{aa}$. Il faudra faire enſuite la proportion ſuivante; PN (m): MN (a) : : NK ($\frac{m^3 + mmx - aam}{aa}$) : NC $= \frac{am^3 + ammx - a^3m}{aam} = \frac{mm + mx - aa}{a}$. Mais MC $= MN + NC = a + \frac{mm + mx - aa}{a}$; donc MC $= \frac{mm + mx}{a}$.

8°. Prenez garde, en liſant l'article 159, que les lignes LM, lm (*Fig.* 128. *Pl.* 7) peuvent être conſidérées comme paralléles, parce qu'elles forment un angle infiniment petit. Il en eſt de même de pluſieurs autres lignes qui ſe trouvent dans cette figure.

9°. L'on aura la valeur de MC énoncée dans l'article 160, en diſant $m + n : m : : MC + CN$ (a) : MC.

10°. Avant que de lire l'article 161 du Traité des

des Infiniment Petits, il ne feroit pas mal de lire les articles 155 & 156 du Traité des Sections coniques de M. le Marquis de l'Hôpital.

11°. Dans l'article 162 l'on ne peut pas tirer MD paralléle à LN (*Fig.* 128. *Pl.* 7.) ſans avoir MD : ML : : EF : EG; en voici la preuve. Si les lignes MD & LN ſont paralléles, l'on aura l'angle MDL égal à ſon alterne ELG. Cela ſuppoſé, voici comment je raiſonne : EF : EG : : le ſinus de l'angle ELF : au ſinus de l'angle ELG. Mais MD : ML : : le ſinus de l'angle DLM, ou ELF : au ſinus de l'angle MDL ou ELG; donc ſi MD & LN ſont paralléles, l'on aura MD : ML : : EF : EG : : $bbgh : accf - ccfh$; donc MD : ML (b) : : $bbgh : accf - ccfh$; donc MD $= \frac{b^3gh}{accf - ccfh}$; donc par là même que MD ſera paralléle à LN, l'on aura MD $= \frac{b^3gh}{accf - ccfh}$.

NOTE LIV.

La plupart des articles de la ſection neuvieme que nous avons éclaircis, ne pouvoient gueres ſe paſſer de commentaire. Le Lecteur n'en ſera que trop convaincu, en jettant les yeux ſur les *numero* 6, 8, 9 & 10 de cette note.

1°. L'équation que donne la ſuppoſition de l'article 163 eſt PM $= \frac{PN}{PO}$ (fig. 130. pl. 7). Il s'enſuit de là que lorſque M. le Marquis de l'Hô-

pital dit que $PM = \frac{AB \times PN}{PO}$, il prend évidemment la constante AB pour l'unité.

2°. Dans les articles 164 & 165 M. le Marquis de l'Hôpital différencie le numérateur de chaque fraction, en le considérant non pas comme numérateur, mais comme une quantité isolée. Il tient la même conduite vis-à-vis le dénominateur.

3°. Pour comprendre la fin de l'article 169, il faut relire la fin de l'article 89.

4°. C'est par l'article 170 que l'on fait à l'article 171 $y = \frac{xz}{a}$.

5°. La proportion de l'article 178 n'est bonne, que parce qu'on considére l'arc infiniment petit M*m* (fig. 135, 136, pl. 7) comme la mesure de l'angle MG*m*. Or on a droit de le considérer ainsi, puisqu'il seroit confondu avec un arc de cercle infiniment petit M*m* qui auroit pour rayon GM, pour centre le point G, & qui par là même seroit la mesure de l'angle MG*m*.

6°. L'on a, à l'article 180, $MI \times MG = BM \times MN$, (fig. 136. pl. 7) parce qu'il est démontré dans tous les élémens de Géométrie que, deux lignes qui se coupent dans un cercle, se coupent en raison réciproque.

S'il s'agit de prouver dans ce même article qu'au point d'infléxion F, la ligne MR est plus grande que la ligne MG, il faudra d'abord supposer pour un moment que $\sqrt{\frac{aab - bcc}{2a + b}} = \sqrt{aa - cc}$.

Cette ſuppoſition vous donnera $a = c$, ou KN = KM; ce qui eſt impoſſible. Il faudra enſuite ſuppoſer que $\sqrt{\frac{aab - bcc}{2a + b}}$ eſt plus grande que $\sqrt{aa - cc}$; cette ſeconde ſuppoſition donnera c plus grand que a, ou KM plus grand que KN; ce qui eſt encore impoſſible; donc au point d'inflexion F l'on aura MG moindre que MR. Enfin l'on ne peut pas ſuppoſer, ainſi qu'on l'aſſure ſur la fin de l'article 180, que $\sqrt{\frac{aab - bcc}{2a + b}}$ ſoit plus grand que $a - c$, ſans avoir KM (c) plus grand que $\frac{aa}{a + b}$. La preuve en eſt renfermée dans le calcul ſuivant. Il n'eſt pas néceſſaire d'avertir que le ſigne > ſignifie *plus grand*.

$$\sqrt{\frac{aab - bcc}{2a + b}} > a - c \text{ par hypothéſe.}$$

$$\frac{aab - bcc}{2a + b} > aa - 2ac + cc$$

$$aab - bcc > 2a^3 - 4aac + 2acc + aab - 2abc + bcc$$

$$o > 2a^3 - 4aac + 2acc - 2abc + 2bcc.$$

Cette derniere équation ſignifie que les quantités $4aac$ & $2abc$ affectées du ſigne — ſurpaſſent les quantités $2a^3$, $2acc$ & $2bcc$ affectées du ſigne +. Reprenons ce calcul.

$$4aac + 2abc > 2a^3 + 2acc + 2bcc$$

$$2aac + abc > a^3 + acc + bcc$$

$$aac + abc > a^3 - aac + acc + bcc$$

$$aac + abc - acc - bcc > a^3 - aac.$$

Diviſons ces deux quantités par $a + b$, nous aurons

$$ac - cc > \frac{a^3 - aac}{a + b}$$

$$\overline{a - c} \times c > \frac{aa \times \overline{a - c}}{a + b}$$

$$c > \frac{aa}{a + b}$$

Donc si l'on suppose $\sqrt{\frac{aab - bcc}{2a + b}}$ plus grand que $a - c$, l'on trouvera c plus grand que $\frac{aa}{a + b}$.

7°. L'on peut demander en lisant l'article 182, pourquoi $GMm + MGg$ (fig. 135. pl. 7.) $= \frac{2a + 3b}{b} MGg + \frac{\overline{a + b} \times \overline{cc - aa}}{aab} KGg$. L'on répondra que $GMm + MGg = \frac{2a + 2b}{b} MGg +$

$MGg + \frac{\overline{a + b} \times \overline{cc - aa}}{aab} KGg = \frac{2a + 2b}{b} MGg$

$+ \frac{b}{b} MGg + \frac{\overline{a + b} \times \overline{cc - aa}}{aab} KGg$, parce que $\frac{b}{b} = 1$, & que $MGg = 1 MGg$. Mais $\frac{2a + 2b}{b}$

$MGg + \frac{b}{b} MGg = \frac{2a + 3b}{b} MGg$; donc &c.

8°. L'article 183 présente une autre solution du problême de l'article 182. Il se comprend à la premiere lecture, lorsqu'on se rappelle que, par la propriété du cercle, PE^2 (fig. 140. pl. 7) $= AP \times PV = 2cu - uu$; & que $EM\ (y) = \frac{xz}{a}$ (art. 171), $= \frac{axz}{au}$, devient par là même $\frac{axz}{bc}$,

parce que OB(b) : KB(a) :: KB(a) : AK (c); donc $aa = bc$; donc si l'on a EM $= \frac{axz}{aa}$, l'on aura EM $= \frac{axz}{bc}$.

L'on assure à la fin du même article 183 que par là même que l'espace AEH = au rectangle PQ, moins le double de l'espace circulaire APE, l'on aura AEH = PE × KA + KP × AE. Le calcul suivant va mettre cette vérité dans tout son jour.

Je nomme AK, a; KP, b; PE, c; EH, ou l'arc AE, d. Cela fait, voici comment je raisonne : le rectangle PQ $= \overline{AK + KP} \times \overline{PE + EH}$ $= \overline{a+b} \times \overline{c+d} = ac + bc + ad + bd$.

L'espace circulaire APE = AK × $\frac{1}{2}$ AE + KP × $\frac{1}{2}$ PE $= \frac{ad}{2} + \frac{bc}{2}$; donc 2APE $= ad + bc$; donc le rectangle PQ — 2APE $= ac + bc + ad + bd - ad - bc = ac + bd$. Mais PE × AK + KP × AE $= ac + bd$. Donc si l'espace AEH est égal au rectangle PQ, moins le double de l'espace circulaire APE, il sera par là même égal à PE × KA + KP × AE. L'on a supposé dans ce calcul que le point P tomboit au dessous de K; car lorsqu'il tombe au dessus, l'on a AEH = PE × KA — KP × AE.

9°. Pour comprendre l'article 185, voici ce qu'il faut se rappeller. 1°. L'espace AEM $= \frac{aa+ab}{bc} \overline{PE \times KA} + \frac{aa+ab}{bc} \overline{-KP \times AE}$. Mais KP = KV — VP $= u - c$; donc — KP $= c - u$;

donc $\frac{aa + ab}{bc} \overline{- KP \times AE} = \frac{aac + abc - aau - abu}{bc} \times$ AE. 2°. Le secteur AKE $= \frac{AK}{2} \times AE = \frac{c}{2} \times$ AE. 3°. L'espace AEM + le secteur AKE $=$ $\frac{aa + ab}{bc} \overline{PE \times KA} + \frac{aac + abc - aau - abu}{bc}$ AE $+ \frac{c}{2} \times$ AE ; donc l'on aura l'espace AEM + le secteur AKE $= \frac{aa + ab}{bc} \overline{PE \times KA} +$ $\frac{2aac + 2abc - 2aau - 2abu + bcc}{2bc}$ AE. 4°. On ne peut pas faire dans ce même article 185, $u =$ $\frac{2aac + 2abc + bcc}{2aa + 2ab}$ sans faire $2aau + 2abu = 2aac + 2abc + bcc$, & par conséquent sans rendre nulle la valeur $\frac{2aac + 2abc + bcc - 2aau - 2abu}{2bc}$ AE.

10°. Le dernier article de la neuvieme section, c'est-à-dire, l'article 186 présente quelques difficultés que nous allons éclaircir en peu de mots. 1°. Si $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa}$, l'on aura $xx = \frac{1}{2}aa$, & $2xx = aa$; donc en faisant $x = \sqrt{\frac{1}{2}aa}$, le dénominateur de la fraction $\frac{xx - aa}{\sqrt{2xx - aa}}$ deviendra o, ce qui est une marque de l'infini. 2°. Lorsque le point M (*Fig.* 141. *Pl.* 7.) tombe en D, l'on a AM $=$ AD, ou $x = a$; donc l'on a $- \frac{x^3}{2aa} =$ $- \frac{a^3}{2aa} = - \frac{1}{2}a$. 3°. Pour tirer de l'équation y^4

$= x^4 + aaxx - b^4$ la valeur de DD ou 2AD (*Fig.* 142. *Pl.* 7), M. le Marquis de l'Hôpital a fait PM $= o$, parce que dans cette ſuppoſition l'on a AD $= x$. Il a enſuite cherché la valeur de x, en maniant ſuivant les régles ordinaires, l'équation $x^4 + aaxx - b^4 = o$; & il a trouvé $x = \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}\sqrt{a^4 + 4b^4}}$, & par conſéquent 2AD ou $2x = \sqrt{-2aa + 2\sqrt{a^4 + 4b^4}}$.

NOTE LV.

La dixieme ſection eſt ſans contredit la moins importante de toutes. Elle n'apprend que ce que ſçavent tous les Mathématiciens, c'eſt-à-dire, que par le calcul des *différences* on réſout beaucoup plus facilement que par toute autre méthode, les problêmes propoſés dans les neuf ſections précédentes. Pour ſe convaincre de cette vérité, il ne ſera pas néceſſaire de lire les 22 *articles* qui compoſent la dixieme ſection ; on pourra ſe contenter de la lecture de l'*article* 208 ; on verra combien compliquée eſt l'équation que donnent les méthodes qui ne ſont pas fondées ſur le calcul différentiel, dont M. le Marquis de l'Hôpital nous a donné les régles avec autant de clarté, que de préciſion dans ſon *Analyſe des Infiniment Petits.*

TABLE.

PROPOSITION I.

FIN.

Fautes à corriger.

Page 6 ligne 20 $\frac{x}{x}$ *liſez* $\frac{x}{y}$.

page 12 ligne 4 *ayypx* *liſez* *ayydx*. Ces deux fautes ne ſont que dans quelques exemplaires.

page 38 ligne 20 de *liſez* des

page 46 ligne 24 NQ *liſez* MQ

page 65 ligne 20 $x\times$ *liſez* xx

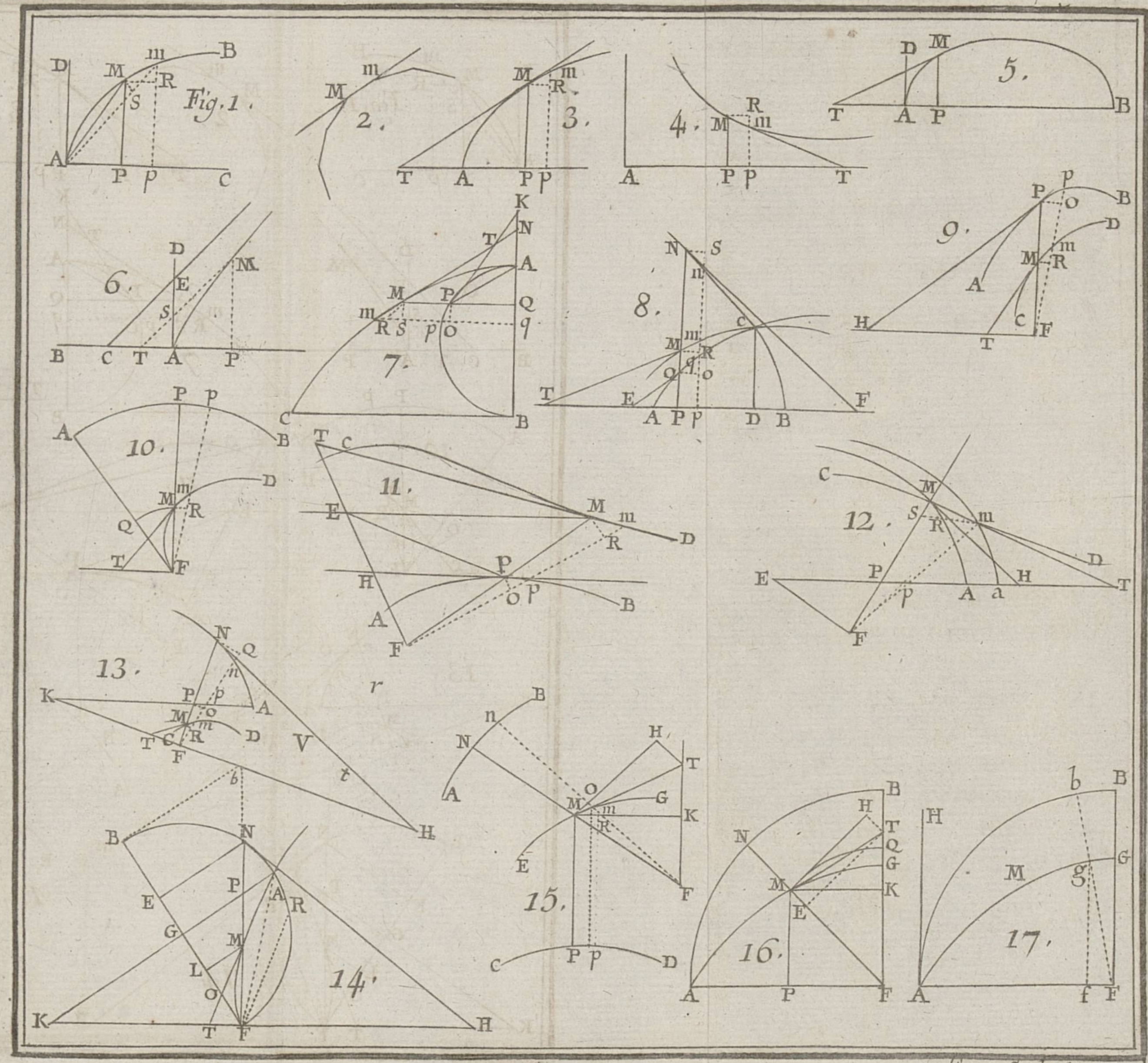
page 133 ligne 23 ſorre *liſez* ſorte

page 195 ligne 7 QC *liſez* .QC

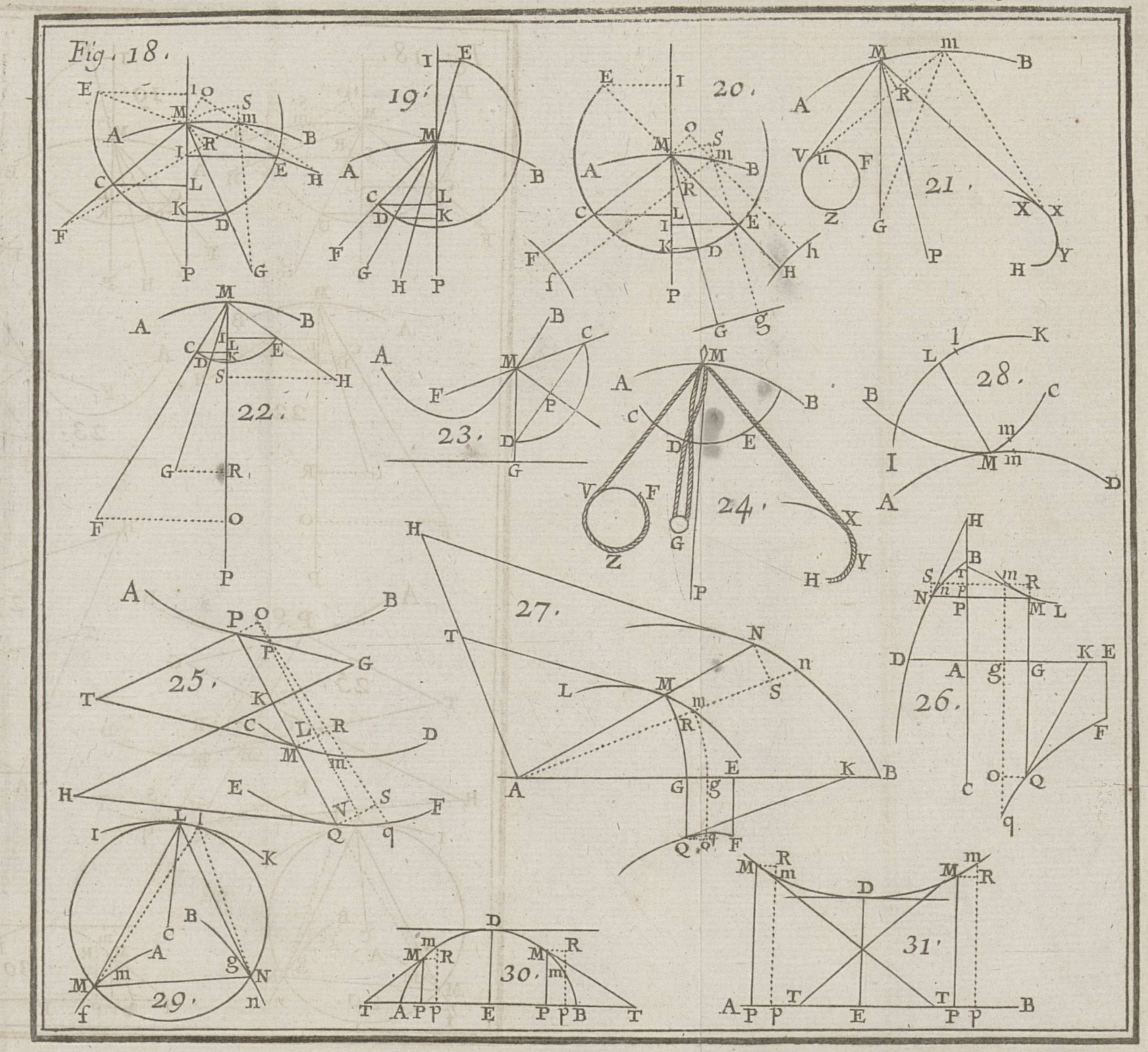
page 297 ligne 19 $a\times y$ *liſez* axy

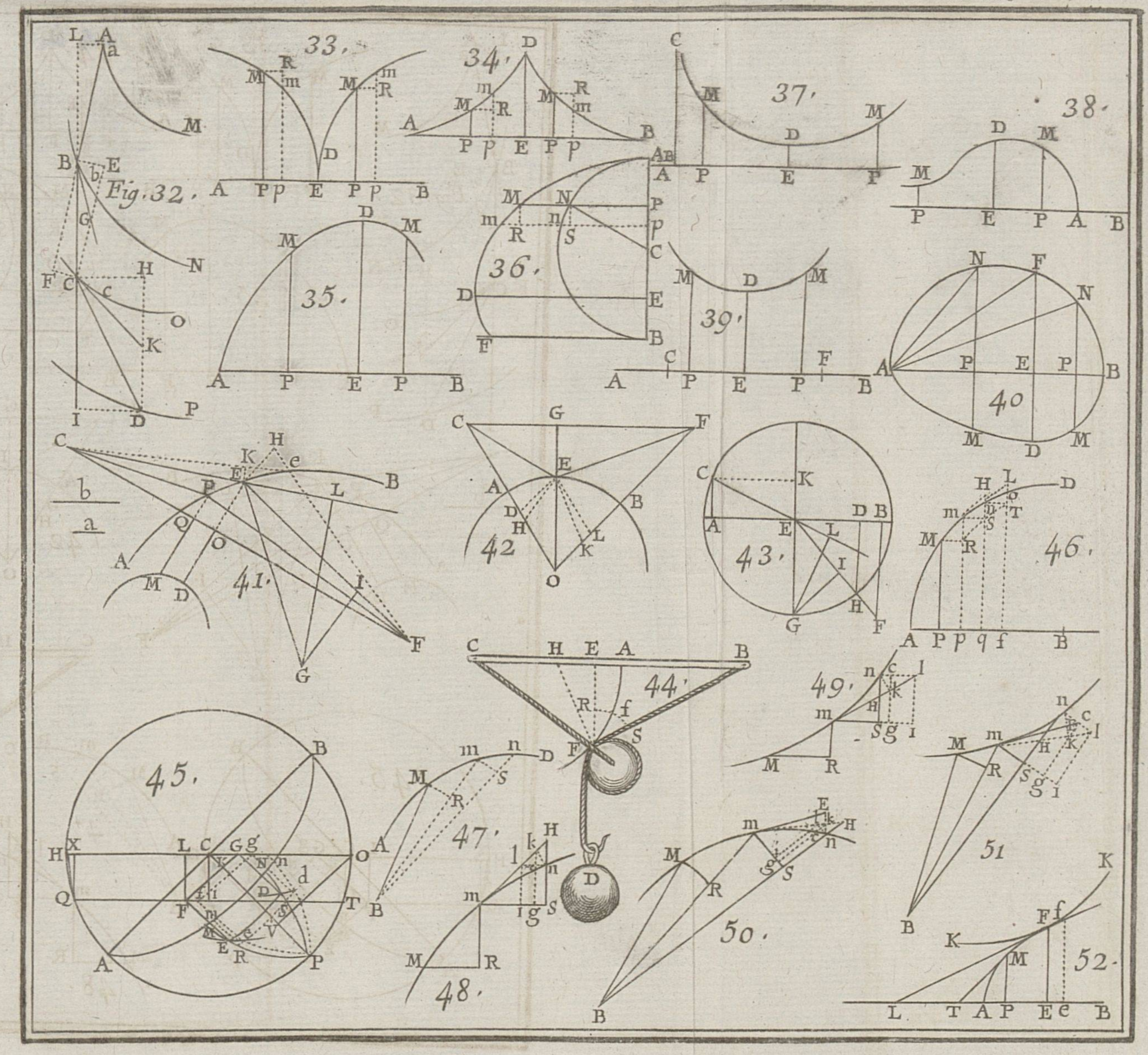
page 338 ligne 7 *liſez* $\frac{dx^2+dy^2 \sqrt{dx^2+dy^2}}{-dxddy}$

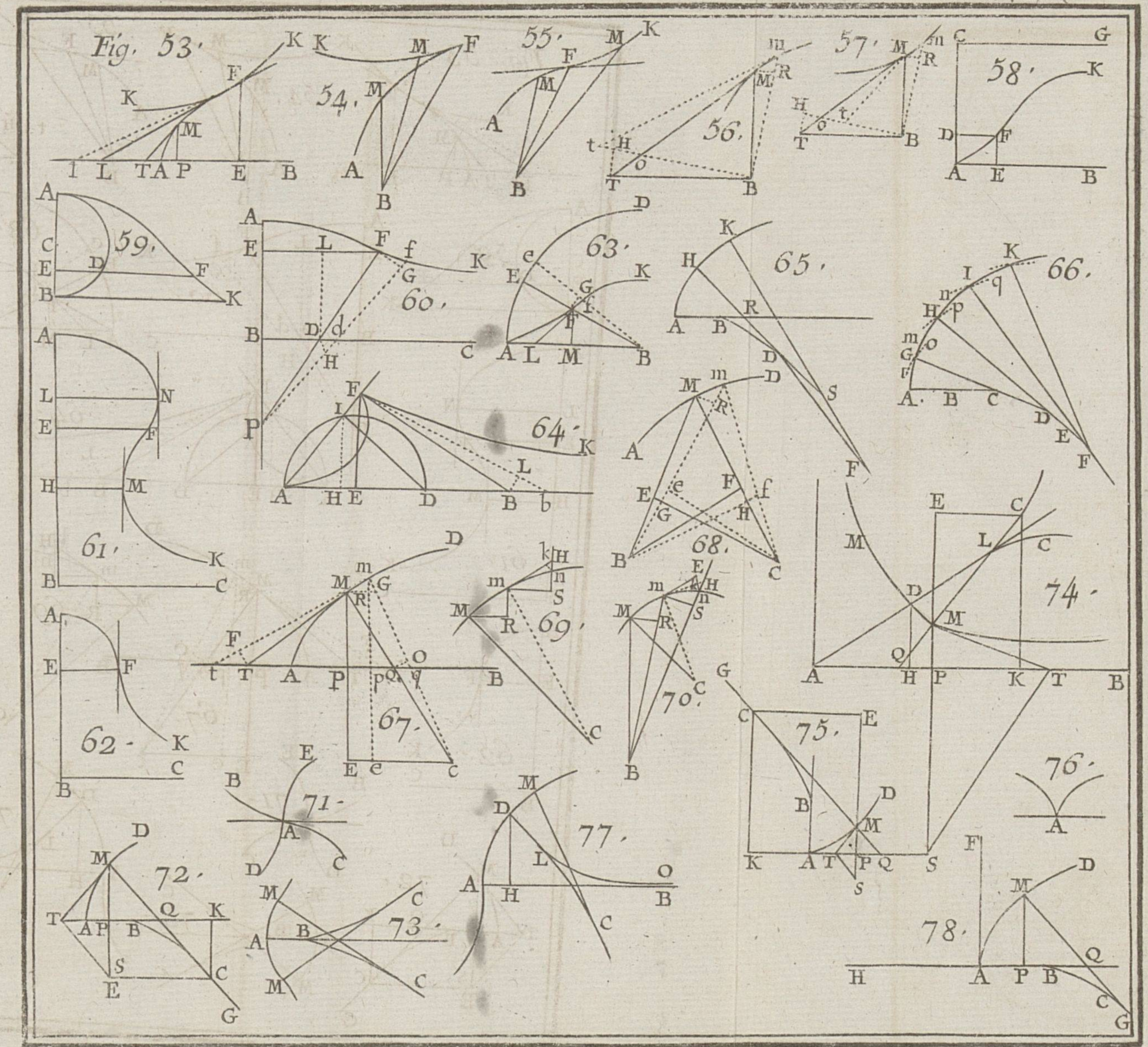
Planche I. pag.



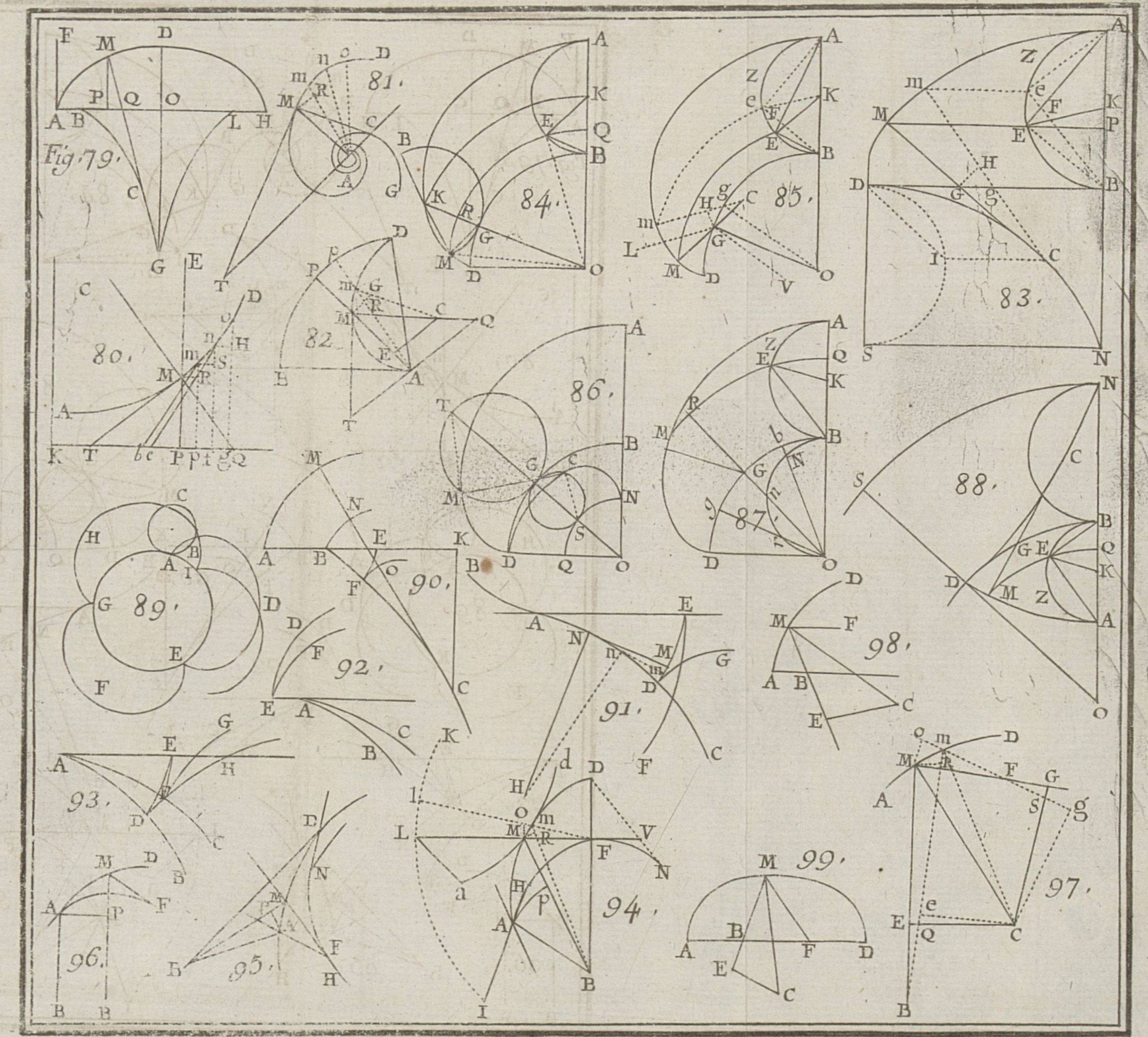
Faure Sculpsit.

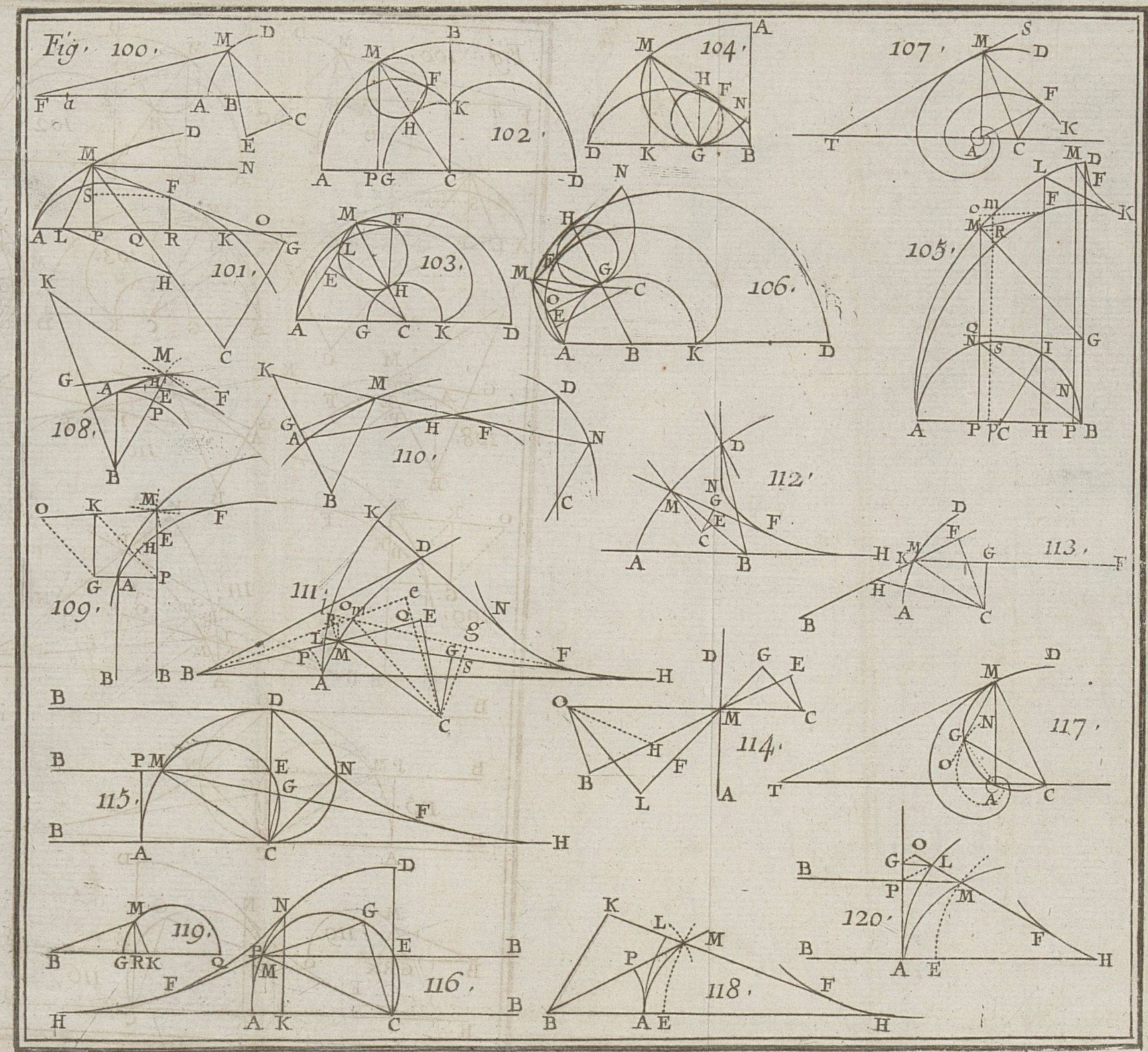

Fig. 18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
29.
30.
31.


Fig. 32.
33.
34.
35.
36.
37.
38.
39.
40.
41.
42.
43.
44.
45.
46.
47.
48.
49.
50.
51.
52.

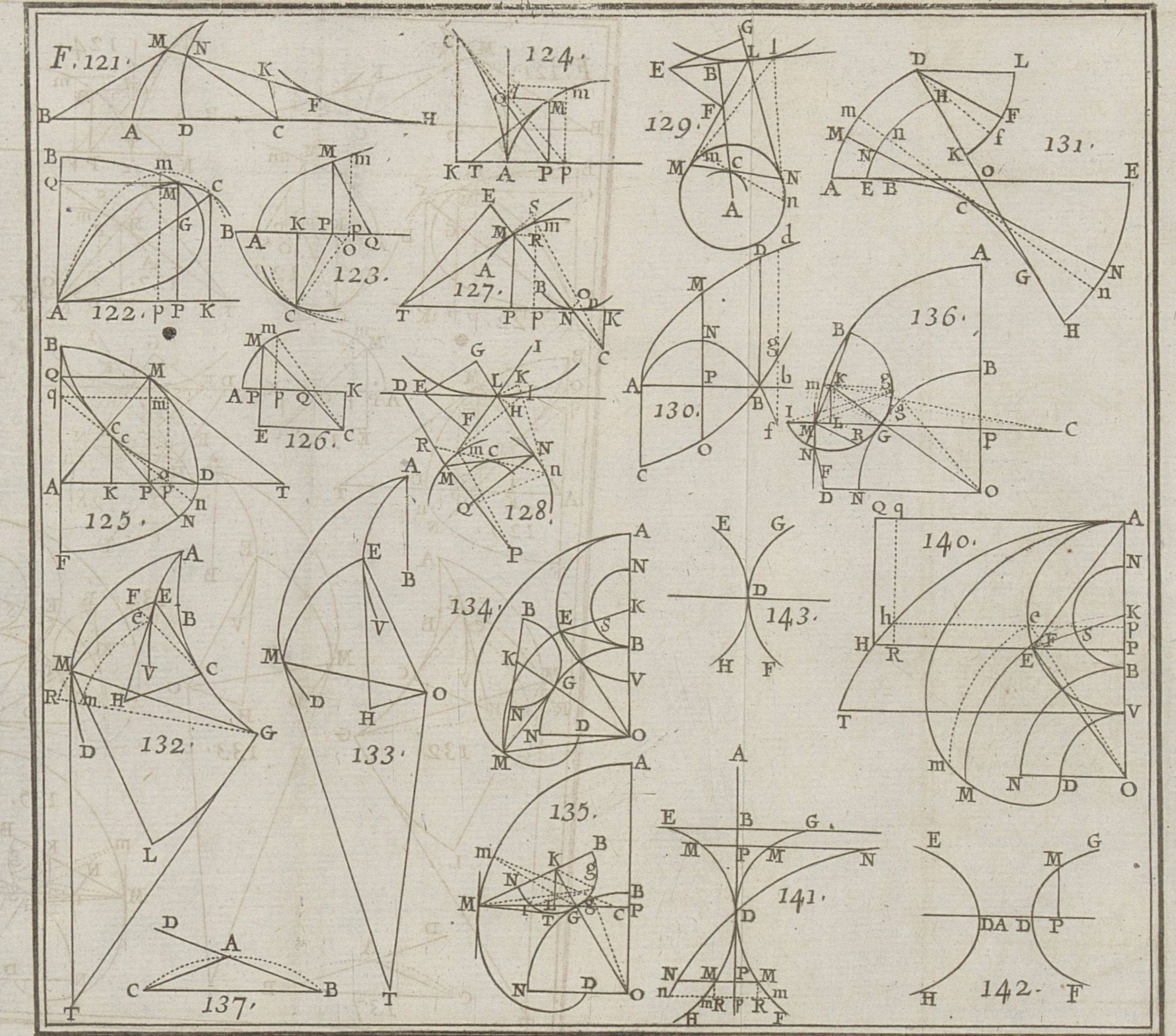


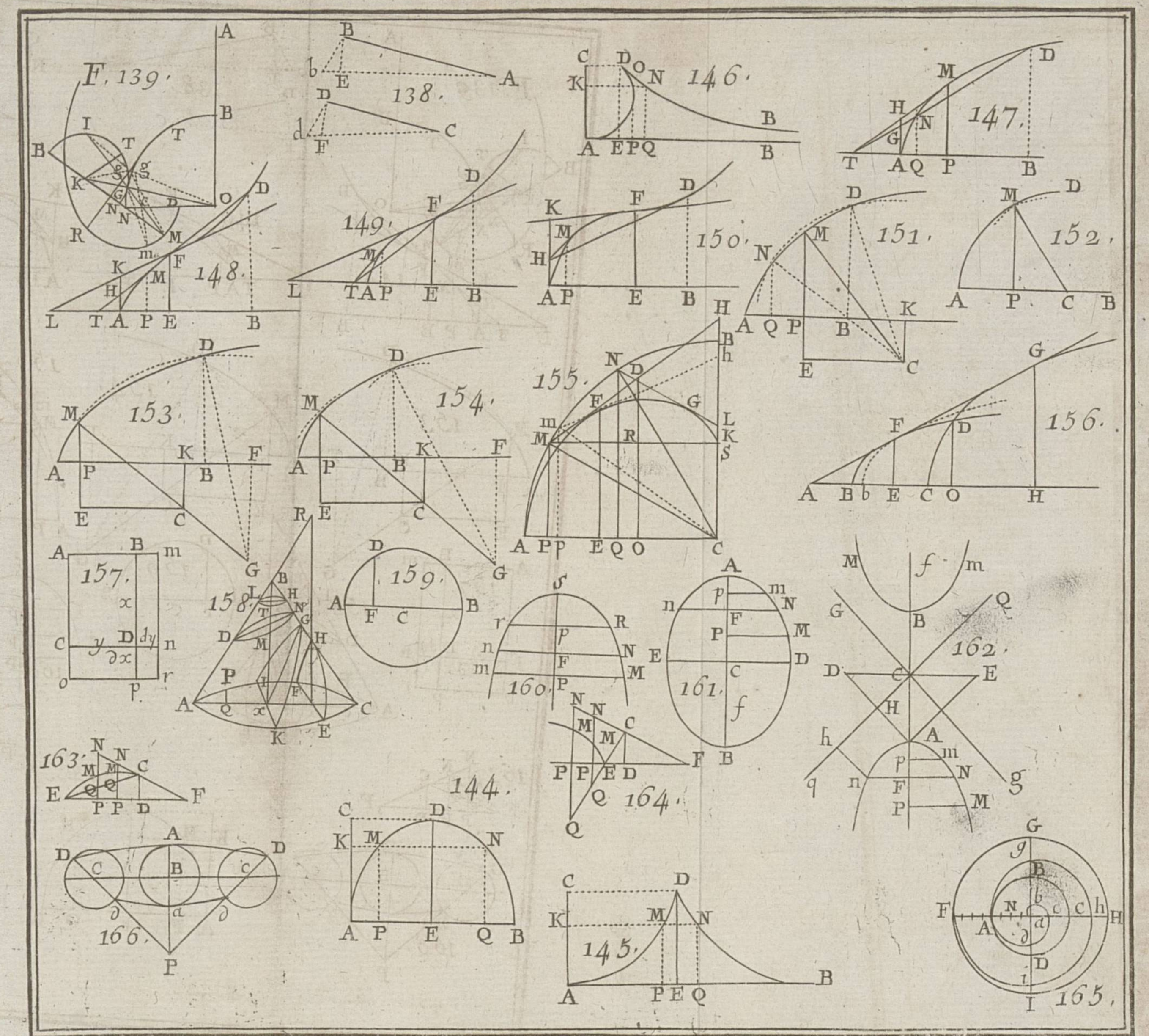
Faure Sculpsit.


Fig. 79.
80.
81.
82.
83.
84.
85.
86.
87.
88.
89.
90.
91.
92.
93.
94.
95.
96.
97.
98.
99.



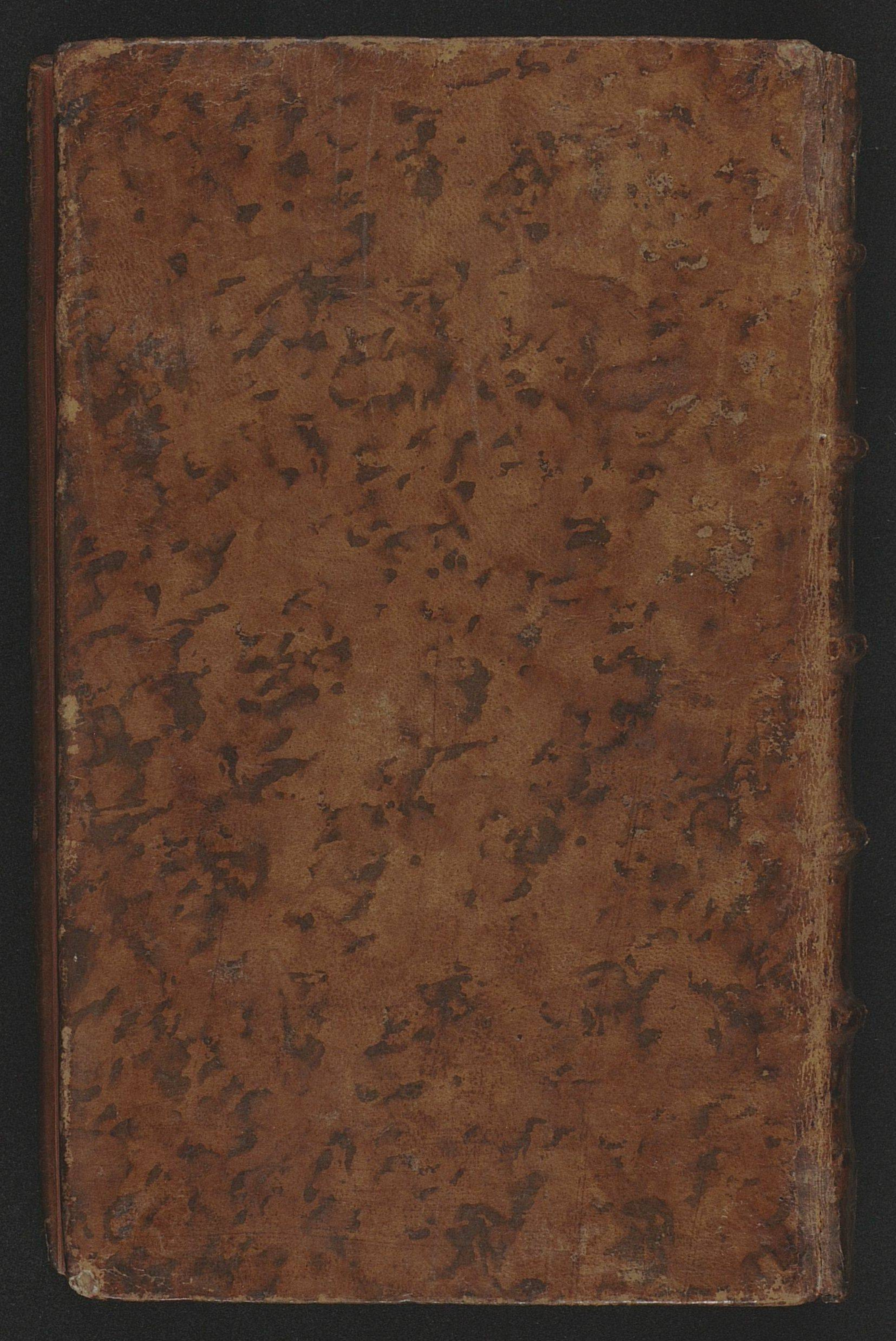
Faure Sculpsit.


F. 121.
122.
123.
124.
125.
126.
127.
128.
129.
130.
131.
132.
133.
134.
135.
136.
137.
140.
141.
142.
143.










ANALYS
DE LA
CAILLE



inches

centimeters

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 (A)	12	13	14	15
L*	39.12	65.43	49.87	44.26	55.56	70.82	63.51	39.92	52.24	97.06	92.02	87.34	82.14	72.06	62.15
a*	13.24	18.11	-4.34	-13.80	9.82	-33.43	34.26	11.81	48.55	-0.40	-0.60	-0.75	-1.06	-1.19	-1.07
b*	15.07	18.72	-22.29	22.85	-24.49	-0.35	59.60	-46.07	18.51	1.13	0.23	0.21	0.43	0.28	0.19
Density										0.04	0.09	0.15	0.22	0.36	0.51

D50 Illuminant, 2 degree observer

Golden Thread

	16 (M)	17	18 (B)	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
L*	49.25	38.62	28.86	16.19	8.29	3.44	31.41	72.46	72.95	29.37	54.91	43.96	82.74	52.79	50.87
a*	-0.16	-0.18	0.54	-0.05	-0.81	-0.23	20.98	-24.45	16.83	13.06	-38.91	52.00	3.45	50.88	-27.17
b*	0.01	-0.04	0.60	0.73	0.19	0.49	-19.43	55.93	68.80	-49.49	30.77	30.01	81.29	-12.72	-29.46
Density	0.75	0.98	1.24	1.67	2.04	2.42									

Colors by Munsell Color Services Lab

Don Williams